Devoir Surveillé 7

durée de l'épreuve : 4h

- *La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.*
- $\boxed{\textit{Les résultats non encadrés à la \textbf{règle} ne seront pas pris en compte dans la notation.}}$
- *La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Le sujet comporte quatre pages et est composé d'un exercice et de deux problèmes, tous indépendants les uns des autres.

Exercice.

On considère la fraction rationnelle :

$$F = \frac{X^2 + 5X - 2}{X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X} \in \mathbb{R}(X)$$

1. Décomposer le polynôme $Q = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle F dans $\mathbb{R}(X)$.
3. Pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 3, on pose :

$$S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{n^2 + 5n - 2}{n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n}$$

   (a) Montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, \qquad S_N = \frac{5}{3} + \frac{1}{N+1} - \frac{2}{N-1}$$

   (b) La suite $(S_N)_{N \geqslant 3}$ est-elle convergente ? Préciser la limite le cas échéant.

Problème 1 (étude d'une suite de polynômes).

La première question ci-dessous est indépendante du reste du problème. Cependant, l'idée qu'elle contient permettra de traiter la question 3.

0. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction f' est impaire sur $\mathbb{R}$.

Remarque : de la même manière, on pourrait montrer que la dérivée d'une fonction impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$ est paire sur $\mathbb{R}$.

On considère la suite de polynômes $(P_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$, à coefficients réels, définie par :

- ★ $P_0(X) = 1$;
- ★ et, pour tout entier naturel n,

$$P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(X^2+1)P_n'(X)$$

Partie I : premières propriétés

1. Calculer les polynômes $P_1(X)$ et $P_2(X)$.
2. (a) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \deg(P_n) \leqslant n$$

On note dans la suite a_n le coefficient du monôme X^n du polynôme $P_n(X)$.

(b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n$$

(c) En déduire la valeur de a_n pour tout entier naturel n et conclure quant au degré de $P_n(X)$.

3. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$$

Que dire alors de la parité de la fonction polynomiale associée à $P_n(X)$?

4. (a) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_{n+1}'(X) = (n+2)P_n(X)$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2)\int_0^x P_n(t)\,\mathrm{d}t$$

(c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_{2n+1}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad P_{2n}(0) = (-1)^n$$

On pourra utiliser la relation de récurrence ainsi que la question 4.(a).

(d) Calculer les polynômes $P_3(X)$ et $P_4(X)$.

Partie II : détermination des polynômes $P_n(X)$

On rappelle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_{n+1}'(X) = (n+2)P_n(X)$$

5. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_{n+2}(X) - 2XP_{n+1}(X) + (X^2+1)P_n(X) = 0$$

On utilisera la relation de récurrence vérifiée par la suite.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = P_n(x)$.

i. Justifier que $u_0 = 1$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} - 2xu_{n+1} + (x^2+1)u_n = 0$$

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n et de x.

(c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n(X) = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right]$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Rappeler la factorisation du polynôme $R(X) = X^{n+1} - 1$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Montrer qu'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est racine de $P_n(X)$ si et seulement si $\dfrac{z+i}{z-i}$ est racine de $R(X)$.
   (c) En déduire que l'ensemble des racines de $P_n(X)$ est :

$$\left\{ \cot\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \,\middle|\, k \in [\![1, n]\!] \right\}$$

   où $\cot = \dfrac{\cos}{\sin}$ désigne la fonction *cotangente*.
   (d) Justifier que les racines obtenues sont deux à deux distinctes (*on étudiera les variations de* cot) et en déduire la factorisation de $P_n(X)$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
   (e) Calculer la somme des racines du polynôme $P_n(X)$.

Problème 2 (exponentielle de matrices).

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ l'anneau des matrices carrées de taille $p \times p$ à coefficients réels, 0_p la matrice nulle et I_p la matrice identité de taille $p \times p$.

Partie I : cas d'une matrice nilpotente

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est dite *nilpotente d'indice trois* si $A^2 \neq 0_p$ et $A^3 = 0_p$. Dans toute cette partie, on se donne une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice 3 et, pour tout nombre réel t, on note $E(t)$ la matrice de taille $p \times p$ définie par :

$$E(t) = I_p + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$

1. Vérifier que :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \qquad E(s)E(t) = E(s+t)$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad E(t)^n = E(nt)$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. Justifier que la matrice $E(t)$ est inversible. Quel est son inverse ?
4. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que si $aI_p + bA + cA^2 = 0_p$, alors $a = b = c = 0$.
   Indication : on commencera par multiplier par A^2 dans la relation.
5. En déduire que l'application :

$$E : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_p(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & E(t) \end{array} \right.$$

   est injective.
6. Dans cette question, on se place dans le cas $p = 3$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que A est nilpotente d'indice trois et, pour tout nombre réel t, expliciter $E(t)$ sous forme matricielle.

Partie II : le cas particulier $p = 2$

Dans cette partie, on travaille uniquement dans le cas $p = 2$. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

On admettra le résultat suivant (qui sera démontré dans le chapitre sur l'intégration) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{t} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k\,!} \qquad \text{ce que l'on peut noter} \qquad \mathrm{e}^{t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k\,!}$$

7. Posons $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Justifier que P est inversible et vérifier que la matrice :

$$D = P^{-1}AP$$

   est diagonale.
8. Pour tout entier naturel n, expliciter la matrice D^n et démontrer la relation $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sous forme matricielle.
9. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit la matrice $E_n(t) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k\,!} A^k$$

   On note $a_n(t), b_n(t), c_n(t)$ et $d_n(t)$ les quatre coefficients de cette matrice, c'est-à-dire :

$$E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

   Expliciter ces quatre coefficients.
10. Soit $t \in \mathbb{R}$. On note $a(t), b(t), c(t)$ et $d(t)$ les limites respectives, quand n tend vers $+\infty$, des suites $(a_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ et on pose :

$$E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

    Montrer que :

$$a(t) = 3\,\mathrm{e}^{2t} - 2\,\mathrm{e}^{t}, \quad b(t) = -6\,\mathrm{e}^{2t} + 6\,\mathrm{e}^{t}, \quad c(t) = \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t} \quad \text{et} \quad d(t) = -2\,\mathrm{e}^{2t} + 3\,\mathrm{e}^{t}$$

11. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad E(t) = \mathrm{e}^{2t}\,Q + \mathrm{e}^{t}\,R$$

    Expliciter ces deux matrices.
12. Calculer Q^2, R^2, QR et RQ.
13. En déduire que :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad E(s)E(t) = E(s+t)$$

    Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, que dire de $(E(t))^n$? de $(E(t))^{-1}$? L'application $E : t \longmapsto E(t)$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle injective ?

– FIN DE L'ÉPREUVE –