# Devoir Surveillé 7

*durée de l'épreuve* : 4h

- *La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir.*
- *Les résultats non encadrés à la* ***règle*** *ne seront pas pris en compte dans la notation.*
- *La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**Le sujet est composé de trois exercices et d'un problème indépendants.**

## Exercice 1 (équivalents et développements limités).

*Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$.
2. Déterminer la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ des suites de termes généraux suivants :
   (a) $u_n = \dfrac{\sqrt{n} + n^2 + 3}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n} + 1}$ ;
   (b) $v_n = \dfrac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}{\tan\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}$ ;
   (c) $w_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{n^2}$.
3. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \longmapsto \cos(x)$.
   (b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \longmapsto \sqrt{1 - x}$.
   (c) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \longmapsto \sqrt{1 - x^2}$.
   (d) En déduire la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ de :

$$x_n = n^4 \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)$$

## Exercice 2 (polynômes et fractions rationnelles).

*Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^3}{X^3 - 3X^2 + 2X} \in \mathbb{R}(X)$.
2. On considère le polynôme $P = X^4 - 1$.
   (a) Donner la décomposition de $P$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $G = \dfrac{1}{X^4 - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels deux à deux distincts et *non nuls* et :

$$P = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k) \in \mathbb{R}[X]$$

   (a) Justifier qu'il existe $\lambda_0, \lambda_1 \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{XP} = \frac{\lambda_0}{X} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X - x_k}$$

   (b) Justifier que $P(0) \neq 0$ et que $\lambda_0 = \dfrac{1}{P(0)}$.
   (c) Montrer que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \lambda_k = \frac{1}{x_k P'(x_k)}$$

   (d) En déduire l'identité :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}$$

   *Indication* : multiplier d'abord par $X$ dans l'égalité de la question 3.(a).

## Exercice 3 (développement asymptotique d'une suite).

On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \ln(x) \end{array} \right.$.

1. (a) Montrer que $f$ est une application bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Préciser le sens de variation de sa bijection réciproque $f^{-1}$ ainsi que les limites de $f^{-1}$ aux bornes de son domaine de définition. *On dressera le tableau de variations de $f^{-1}$.*
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. *On notera $x_n$ cette unique solution.*
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et déterminer sa limite quand $n$ tend vers $+\infty$.
4. Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 + \frac{\ln(x_n)}{x_n} = \frac{n}{x_n}$$

   En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
5. Montrer que $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ puis déterminer la limite de la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on pose $u_n = \dfrac{n - x_n}{\ln(n)}$.
   (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \qquad u_n - 1 = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)}$$

(b) Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

(c) Conclure que :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n))$$

## Problème (valeur de $\zeta(2)$).

L'objectif de ce problème est d'établir la convergence de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

et de trouver la valeur de sa limite.

*Cette limite est l'image de 2 par une fonction très célèbre en mathématiques, appelée fonction zêta de Riemann*[1]*, et notée $\zeta$.*

Ce problème est composé de quatre parties.

### Partie A : Étude de la fonction cotangente

On note $D$ l'ensemble des nombres réels tels que $\sin(x) \neq 0$. Pour tout nombre réel $x \in D$, on peut définir la *cotangente* de $x$ par :

$$\mathrm{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

1. Quel est l'ensemble de définition $D$ de la fonction cotan ?
2. Montrer que la fonction cotan est $\pi$-périodique et qu'elle est impaire sur $D$.
3. Étudier les variations de la fonction cotan sur $]0,\pi[$ et préciser les limites de cette fonction en $0^+$ et en $\pi^-$.
4. Montrer que :
$$\forall x \in \,]0,\pi[\,, \qquad \mathrm{cotan}(\pi - x) = -\mathrm{cotan}(x)$$
5. Montrer que :
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \mathrm{cotan}(x)^2 \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \mathrm{cotan}(x)^2 + 1$$
*On pourra librement utiliser le fait que :*
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$$

### Partie B : Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la polynôme $P_n = (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}$, où $i$ est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

6. (a) Rappeler l'ensemble des racines complexes du polynôme $U_n = X^{2n+1} - 1$ et factoriser $U_n$ dans $\mathbb{C}[X]$.

   (b) Déterminer les racines complexes du polynôme $P_n$.

   *On montrera que les racines de $P_n$ sont les nombres $\alpha_k = \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, où $k \in [\![1, 2n]\!]$.*
7. Justifier que :
$$\forall k \in [\![1, 2n]\!], \qquad \alpha_k = -\alpha_{2n+1-k},$$
puis que les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ sont deux à deux distincts.
8. On note $C_{P_n} \in \mathbb{C}^*$ le coefficient dominant de $P_n$ (qu'on ne demande pas de calculer ici). Établir que :
$$P_n = C_{P_n} \prod_{k=1}^{n} (X^2 - \alpha_k^2)$$

1. Bernhard Riemann (1826-1866) était un mathématicien allemand dont les contributions en Analyse sont très profondes. La fonction zêta de Riemann fait l'objet d'une conjecture encore actuelle appelée « problème du millénaire ». La résolution de celui-ci est récompensé de la coquette somme d'un million de dollars américain.

## Partie C : Démonstration d'une identité liée à la fonction $\text{cotan}^2$

9. Le polynôme $P_n$ ayant été introduit à la question précédente, montrer en utilisant la formule du binôme de Newton que :

$$P_n = 2i \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{2(n-k)},$$

10. Déterminer $C_{P_n}$.
11. Déduire des questions 8., 9. et 10. l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 = \frac{n(2n-1)}{3}$$

*Indication* : quel est le coefficient du monôme de degré $2n-2$ de $P_n$ ?

## Partie D : Conclusion

12. En utilisant les questions 5. et 11., établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} + \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2}$$

*Indication* : on appliquera 5. aux points $x = \dfrac{k\pi}{2n+1}$.

13. En déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ évoquée dans l'introduction et déterminer la limite de cette suite.

**– FIN DE L'ÉPREUVE –**