

DEVOIR SURVEILLÉ 6

durée de l'épreuve : 3h

- La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.
- *Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.*
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte trois pages et est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants les uns des autres.

Exercice 1 (convexité).

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{R}^I$. Donner la définition de « f est convexe sur I ».
2. Soit la fonction $\varphi : x \mapsto -\ln(1+2x)$ définie sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
 - (a) Montrer que φ est convexe sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
 - (b) En déduire que :

$$\forall x, y \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[, \quad \sqrt{(1+2x)(1+2y)} \leq 1+x+y$$

Exercice 2 (étude d'une suite).

On donne l'encadrement $2 \leq e \leq 3$ qu'on pourra utiliser librement.

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f d'expression :

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
2. Justifier qu'il est possible de prolonger f par continuité en 0. Par abus de notation, on notera encore f le prolongement ainsi obtenu.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
4. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.
5. Dresser le tableau de variations de f . On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(e)$.

Partie B : étude d'une suite

On note $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 3$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{\ln(v_n)}$$

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \geq e$.
7. Justifier que la suite v est convergente. *On ne demande pas de déterminer sa limite ici.*
8. (a) Montrer que :

$$\forall x \in [e, +\infty[, \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$$

(b) Énoncer le théorème relatif à l'inégalité des accroissements finis.

(c) Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_{n+1} - e| \leq \frac{|v_n - e|}{4}$$

(d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$$

et conclure quant à la limite de v .

9. Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

Problème (exponentielle de matrices).

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'anneau des matrices carrées de taille $p \times p$ à coefficients réels, 0_p la matrice nulle et I_p la matrice identité de taille $p \times p$.

Partie I : cas d'une matrice nilpotente

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite *nilpotente d'indice trois* si $A^2 \neq 0_p$ et $A^3 = 0_p$. Dans toute cette partie, on se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice 3 et, pour tout nombre réel t , on note $E(t)$ la matrice de taille $p \times p$ définie par :

$$E(t) = I_p + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$

1. Vérifier que :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad E(s)E(t) = E(s+t)$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad E(t)^n = E(nt)$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. Justifier que la matrice $E(t)$ est inversible. Quel est son inverse ?
4. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que si $aI_p + bA + cA^2 = 0_p$, alors $a = b = c = 0$.
5. En déduire que l'application :

$$E : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto E(t) \end{cases}$$

est injective.

6. Dans cette question, on se place dans le cas $p = 3$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que A est nilpotente d'indice trois et, pour tout nombre réel t , expliciter $E(t)$ sous forme matricielle.

Partie II : le cas particulier $p = 2$

Dans cette partie, on travaille uniquement dans le cas $p = 2$. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

On admettra le résultat suivant (qui sera démontré dans le chapitre sur l'intégration) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \quad \text{ce que l'on peut noter} \quad e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$$

7. Posons $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Justifier que P est inversible et vérifier que la matrice :

$$D = P^{-1}AP$$

est diagonale.

8. Pour tout entier naturel n , expliciter la matrice D^n et démontrer la relation $A^n = PD^nP^{-1}$.
En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sous forme matricielle.
9. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit la matrice $E_n(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} A^k$$

On note $a_n(t), b_n(t), c_n(t)$ et $d_n(t)$ les quatre coefficients de cette matrice, c'est-à-dire :

$$E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

Expliciter ces quatre coefficients.

10. Soit $t \in \mathbb{R}$. On note $a(t), b(t), c(t)$ et $d(t)$ les limites respectives, quand n tend vers $+\infty$, des suites $(a_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ et on pose :

$$E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

Montrer que :

$$a(t) = 3e^{2t} - 2e^t, \quad b(t) = -6e^{2t} + 6e^t, \quad c(t) = e^{2t} - e^t \quad \text{et} \quad d(t) = -2e^{2t} + 3e^t$$

11. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad E(t) = e^{2t} Q + e^t R$$

Expliciter ces deux matrices.

12. Calculer Q^2 , R^2 , QR et RQ .
13. En déduire que :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad E(s)E(t) = E(s+t)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, que dire de $(E(t))^n$? de $(E(t))^{-1}$? L'application $E : t \mapsto E(t)$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle injective ?

– FIN DE L'ÉPREUVE –