

DEVOIR SURVEILLÉ 6

durée de l'épreuve : 4h

- La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir.
- Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet est composé de trois exercices et d'un problème indépendants.

Exercice 1 (calcul des puissances d'une matrice).

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Première méthode

1. On pose $B = A - I_3$. Calculer les puissances de la matrice B .
2. En déduire les puissances de A .

Deuxième méthode : avec un polynôme annulateur

Définition Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et :

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k = a_0 X^0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_d X^d \in \mathbb{C}[X],$$

où $d \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{C}$.

★ On définit la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notée $P(A)$, par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^d a_k X^k = a_0 \mathbf{I}_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_d A^d$$

★ On dit que P est un *polynôme annulateur* de A si $P(A) = 0_n$.

Remarque : on admettra que si $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors :

$$(P + Q)(A) = P(A) + Q(A) \quad \text{et} \quad (PQ)(A) = P(A)Q(A)$$

3. Montrer que $P = X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de A .

4. Justifier que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} .

5. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

(a) Montrer que :

$$\exists Q_n \in \mathbb{R}[X], \quad X^n = (X^2 - 3X + 2)Q_n + (2^n - 1)X + 2 - 2^n$$

(b) En déduire la matrice A^n .

Exercice 2 (calcul de la limite d'une suite).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

(a) Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$$

(b) En déduire un encadrement de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

$$\text{On pourra utiliser le fait que, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Dans la suite de l'exercice, on considère une fonction $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n(f) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

2. Justifier que la fonction $|f''|$ est majorée sur $[0, 1]$.

Dans la suite de l'exercice, on note $M \in \mathbb{R}_+$ un majorant de $|f''|$ sur $[0, 1]$.

3. On considère les fonctions φ et ψ sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \varphi(x) = f(x) - M\frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \psi(x) = f(x) + M\frac{x^2}{2}$$

(a) Démontrer que φ et ψ sont l'une convexe et l'autre concave sur $[0, 1]$.

(b) Donner une équation des tangentes aux courbes représentatives de φ et ψ en 0.

(c) En déduire que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad xf'(0) - M\frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq xf'(0) + M\frac{x^2}{2}$$

4. En déduire que la suite $(u_n(f))_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

5. *Une application.*

$$\text{Calculer la limite } \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right), \text{ notée } \ell.$$

Exercice 3 (polynômes et fractions rationnelles).

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $F = \frac{X^3}{X^3 - 3X^2 + 2X} \in \mathbb{R}(X)$.

2. On considère le polynôme $P = X^4 - 1$.

- (a) Donner la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.
- (b) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $G = \frac{1}{X^4 - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n$ des nombres réels deux à deux distincts et *non nuls* et :

$$P = \prod_{k=1}^n (X - x_k) \in \mathbb{R}[X]$$

- (a) Justifier qu'il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{XP} = \frac{\lambda_0}{X} + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{X - x_k}$$

- (b) Justifier que $P(0) \neq 0$ et que $\lambda_0 = \frac{1}{P(0)}$.

- (c) Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_k = \frac{1}{x_k P'(x_k)}$$

- (d) En déduire l'identité :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}$$

Problème (valeur de $\zeta(2)$).

L'objectif de ce problème est d'établir la convergence de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

et de trouver la valeur de sa limite.

Cette limite est l'image de 2 par une fonction très célèbre en mathématiques, appelée fonction zêta de Riemann et notée ζ .

Ce problème est composé de quatre parties.

Partie A : Étude de la fonction cotangente

On note D l'ensemble des nombres réels tels que $\sin(x) \neq 0$. Pour tout nombre réel $x \in D$, on peut définir la *cotangente* de x par :

$$\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

1. Quel est l'ensemble de définition D de la fonction $\cotan$?
2. Montrer que la fonction $\cotan$ est π -périodique et qu'elle est impaire sur D .
3. Étudier les variations de la fonction $\cotan$ sur $]0, \pi[$ et préciser les limites de cette fonction en 0^+ et en π^- .
4. Montrer que :

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \cotan(\pi - x) = -\cotan(x)$$

5. Montrer que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \cotan(x)^2 \leq \frac{1}{x^2} \leq \cotan(x)^2 + 1$$

On pourra librement utiliser le fait que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

Partie B : Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la polynôme $P_n = (X + i)^{2n+1} - (X - i)^{2n+1}$, où i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

6. (a) Rappeler l'ensemble des racines complexes du polynôme $U_n = X^{2n+1} - 1$ et factoriser U_n dans $\mathbb{C}[X]$.
(b) Déterminer les racines complexes du polynôme P_n .

On montrera que les racines de P_n sont les nombres $\alpha_k = \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, où $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$.

7. Justifier que :

$$\forall k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, \quad \alpha_k = -\alpha_{2n+1-k},$$

puis que les nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ sont deux à deux distincts.

8. On note $C_{P_n} \in \mathbb{C}^*$ le coefficient dominant de P_n (qu'on ne demande pas de calculer ici). Établir que :

$$P_n = C_{P_n} \prod_{k=1}^n (X^2 - \alpha_k^2)$$

Partie C : Démonstration d'une identité liée à la fonction $\cotan^2$

9. Le polynôme P_n ayant été introduit à la question précédente, montrer que :

$$P_n = 2i \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{2(n-k)},$$

10. Déterminer C_{P_n} .

11. Dédire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$$

Partie D : Conclusion

12. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} + \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2}$$

13. En déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ évoquée dans l'introduction et déterminer la limite de cette suite.

– FIN DE L'ÉPREUVE –