

DEVOIR SURVEILLÉ 6

un corrigé

Exercice 1 (polynôme annulateur et puissances d'une matrice).

Première méthode

1. On a $B^2 = B$ puis, par une récurrence immédiate :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B^n = B \quad (\text{et} \quad B^0 = I_3)}$$

2. On a $A = B + I_3$ et les matrices B et I_3 commutent (car I_3 est une matrice scalaire). On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} A^n &= (B + I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} = I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \right) B \\ &= I_3 + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 1 \right) B \\ &= I_3 + (2^n - 1)B \end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton. En explicitant les coefficients, on conclut que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 2^n & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}}$$

En effet, l'égalité obtenue reste vraie pour $n = 0$ puisque $A^0 = I_3$.

Deuxième méthode : avec un polynôme annulateur

3. On a :

$$P(A) = A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

donc :

$$\boxed{P \text{ est un polynôme annulateur de } A}$$

4. On a $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$ d'après la question précédente, ce que l'on peut réécrire :

$$2I_3 = 3A - A^2 \quad \text{soit encore} \quad I_3 = \frac{1}{2}(3I_3 - A)A$$

En factorisant à gauche par A dans l'expression $3A - A^2$ et en divisant par 2, on a aussi l'égalité $I_3 = A \left[\frac{1}{2}(3I_3 - A) \right]$.

Par définition de l'inversibilité d'une matrice, on peut conclure que :

$$\boxed{A \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) \text{ et } A^{-1} = \frac{1}{2}(3I_3 - A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

5. (a) Le polynôme $P = X^2 - 3X + 2$ est non nul donc on peut effectuer la division euclidienne de X^n par P . Il existe donc $(Q_n, R_n) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que :

$$X^n = PQ_n \quad \text{et} \quad \deg(R_n) < \deg(P)$$

Ainsi, $\deg(R_n) \leq 1$ donc il existe $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ tel que $R_n = \alpha_n X + \beta_n$. Par conséquent :

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q_n + \alpha_n X + \beta_n$$

Les racines de $P = X^2 - 3X + 2$ sont 1 et 2 donc, en évaluant en 1 et en 2 dans la dernière égalité, on obtient les deux équations $\alpha_n + \beta_n = 1$ et $2\alpha_n + \beta_n = 2^n$. La résolution du système correspondant, on obtient $\alpha_n = 2^n - 1$ et $\beta_n = 2 - 2^n$. Ainsi :

$$\boxed{\exists Q_n \in \mathbb{R}[X], \quad X^n = (X^2 - 3X + 2)Q_n + (2^n - 1)X + 2 - 2^n}$$

- (b) D'après l'égalité précédente (puisque $P(A) = 0_3$) :

$$\boxed{A^n = P(A)Q_n(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3 = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 2^n & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}}$$

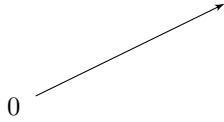
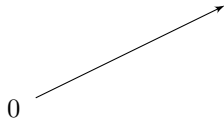
Exercice 2 (calcul de la limite d'une suite).

1. (a) La fonction $\sin$ est concave sur $[0, 1]$ (en effet, elle est dérivable sur cet intervalle et $\sin' = \cos$ est décroissante sur $[0, 1]$) donc $\mathcal{C}_{\sin}$ se situe en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0 sur $[0, 1]$ (l'équation de celle-ci est $y = x$). Ceci démontre l'inégalité de droite.

Considérons la fonction $\varphi : x \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$ sur $[0, 1]$. La fonction φ est deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$\varphi'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = -\sin(x) + x \geq 0$$

d'après l'inégalité que l'on vient de démontrer.

x	0	1
$\varphi''(x)$	+	
φ'		
$\varphi'(x)$	+	
φ		

La fonction φ est donc positive sur $[0, 1]$, ce qui fournit l'inégalité de gauche. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\frac{k}{n^2} \in [0, 1]$ donc, d'après ce qui précède :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leq \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

En sommant ces inégalités et en utilisant la linéarité de la somme, on obtient :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

Or $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)^2}{24n^4} \leq u_n \leq \frac{n+1}{2n}$$

Le théorème des gendarmes et les inégalités précédentes fournissent :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ donc sa dérivée seconde f'' est bien définie et est continue sur le segment $[0, 1]$. D'après le théorème des bornes atteintes, la fonction f'' est bornée sur $[0, 1]$. Autrement dit :

$$\text{la fonction } |f''| \text{ est majorée sur } [0, 1]$$

3. (a) Par hypothèse sur la fonction f , les fonctions φ et ψ sont deux fois dérivables sur $[0, 1]$ (elles sont même de classe $\mathcal{C}^2$ comme différence de fonctions qui le sont) et, pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$\varphi''(x) = f''(x) - M \leq 0 \quad \text{et} \quad \psi''(x) = f''(x) + M \geq 0$$

car $-M \leq f''(x) \leq M$ par définition de M . On en déduit que :

$$\text{la fonction } \varphi \text{ est concave sur } [0, 1] \text{ tandis que } \psi \text{ est convexe}$$

- (b) On a $\varphi(0) = \psi(0) = f(0) = 0$ et $\varphi'(0) = \psi'(0) = f'(0)$ donc :

$$\text{les courbes } \mathcal{C}_\varphi \text{ et } \mathcal{C}_\psi \text{ admettent la droite } (T) : y = f'(0)x \text{ comme tangente en } 0$$

- (c) La fonction φ est concave sur $[0, 1]$ donc (T) est au-dessus de $\mathcal{C}_\varphi$ sur ce segment, *i.e.* :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \varphi(x) \leq f'(0)x \quad \text{i.e.} \quad f(x) \leq f'(0)x + M \frac{x^2}{2}$$

Sur $[0, 1]$, la fonction ψ est convexe donc (T) est en-dessous de $\mathcal{C}_\psi$; ceci fournit l'autre inégalité. Ainsi :

$$\forall x \in [0, 1], \quad x f'(0) - M \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq x f'(0) + M \frac{x^2}{2}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\frac{k}{n^2} \in [0, 1]$ donc, d'après la question précédente :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f'(0) \frac{k}{n^2} - M \frac{k^2}{2n^4} \leq f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq f'(0) \frac{k}{n^2} + M \frac{k^2}{2n^4}$$

En sommant ces inégalités, il vient :

$$\frac{f'(0)}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{M}{2n^4} \sum_{k=1}^n k^2 \leq u_n(f) \leq \frac{f'(0)}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \frac{M}{2n^4} \sum_{k=1}^n k^2,$$

i.e. :

$$\frac{f'(0)}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{M}{2n^4} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \leq u_n(f) \leq \frac{f'(0)}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{M}{2n^4} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

soit encore :

$$\frac{f'(0)}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{M(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq u_n(f) \leq \frac{f'(0)}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{M(n+1)(2n+1)}{12n^3}$$

Or $\frac{f'(0)}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{M(n+1)(2n+1)}{12n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f'(0)}{2}$ donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\text{la suite } (u_n(f))_{n \geq 1} \text{ est convergente de limite } \frac{f'(0)}{2}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$. Chaque facteur du produit étant strictement positif, on peut écrire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(x_n) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = u_n(f),$$

où $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ (elle l'est en fait sur $] -1, +\infty[$). D'après la question précédente, on a :

$$u_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f'(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

Par continuité de la fonction exponentielle en $\frac{1}{2}$ et d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, on peut conclure que :

$$\boxed{\ell = \lim_{t \rightarrow 1/2} e^t = \sqrt{e}}$$

Exercice 3 (polynômes et fractions rationnelles).

1. On a $X^3 = (X^3 - 3X^2 + 2X) + (3X^2 - 2X)$ donc :

$$F = 1 + \underbrace{\frac{3X^2 - 2X}{X^3 - 3X^2 + 2X}}_{\text{notée } \tilde{F}, \deg(\tilde{F}) = -1 < 0} \quad \text{et donc la partie entière de } F \text{ vaut} \quad E(F) = 1$$

Comme $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$, on sait ensuite qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\tilde{F} = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X-1} + \frac{\gamma}{X-2}$$

En multipliant par X puis en évaluant en 0, on trouve que $\alpha = 0$. On trouve également que $\beta = -1$ et que $\gamma = 4$. Ainsi :

$$\boxed{F = 1 - \frac{1}{X-1} + \frac{4}{X-2}}$$

2. (a) Les racines complexes de P étant ± 1 et $\pm i$, on a :

$$\boxed{P = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)} \quad (\text{factorisation dans } \mathbb{C}[X])$$

et :

$$\boxed{P = (X-1)(X+1)(X^2+1)} \quad (\text{factorisation dans } \mathbb{R}[X])$$

- (b) D'après le théorème sur la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$, on sait qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que :

$$G = \frac{1}{X^4 - 1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i}$$

Déterminons a, b, c et d .

★ On a :

$$(X-1)G = \frac{1}{(X+1)(X-i)(X+i)} = a + b\frac{X-1}{X+1} + c\frac{X-1}{X-i} + d\frac{X-1}{X+i}$$

En évaluant en 1, il vient :

$$a = \frac{1}{2(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2 \times (1^2 + 1^2)} = \frac{1}{4}$$

★ En procédant de manière analogue, on obtient :

$$b = \frac{1}{-2(-1-i)(-1+i)} = \frac{1}{-2 \times (1^2 + 1^2)} = -\frac{1}{4}$$

et :

$$c = \frac{1}{(i-1)(i+1)(i+i)} = \frac{1}{(i^2 - 1) \times 2i} = -\frac{1}{4i} = \frac{i}{4}$$

et enfin :

$$d = \frac{1}{(-i-1)(-i+1)(-i-i)} = \frac{1}{(i^2 - 1) \times (-2i)} = -\frac{i}{4}$$

Finalement :

$$G = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} \right) + \frac{i}{4} \left(\frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i} \right)$$

3. (a) On sait que P admet pour racines simples les nombres réels non nuls distincts $x_1, \dots, x_n$. Ainsi, le polynôme XP admet pour racines $0, x_1, \dots, x_n$; ces racines étant encore simples et distinctes, le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ permet d'affirmer que :

$$\text{il existe } \lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } \frac{1}{XP} = \frac{\lambda_0}{X} + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{X - x_k}$$

- (b) On a :

$$P(0) = \prod_{k=1}^n (0 - x_k) = (-1)^n \prod_{k=1}^n x_k \neq 0$$

car les racines $x_1, \dots, x_n$ de P sont supposées non nulles (et car $\mathbb{R}$ est intègre). De plus, en multipliant par X dans la décomposition en éléments simples obtenue à la question précédente, on a :

$$\frac{1}{P} = \lambda_0 + X \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{X - x_k}$$

En évaluant en 0, on a bien :

$$\lambda_0 = \frac{1}{P(0)}$$

- (c) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En multipliant par $X - x_k$ dans la décomposition en éléments simples de la question 3.(a), on a :

$$\frac{X - x_k}{XP} = \frac{\lambda_0}{X}(X - x_k) + \underbrace{\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n \frac{\lambda_\ell (X - x_k)}{X - x_\ell}}_{\text{notée } G} + \lambda_k \quad (*)$$

On a clairement $G(x_k) = 0$. De plus, comme $P(x_k) = 0$ (x_k étant une racine de P), on a :

$$\frac{X - x_k}{XP} = \frac{1}{X} \cdot \frac{X - x_k}{P(X) - P(x_k)} = \frac{1}{X} \cdot \left(\frac{P(X) - P(x_k)}{X - x_k} \right)^{-1}$$

et :

$$\frac{1}{X} \cdot \left(\frac{P(X) - P(x_k)}{X - x_k} \right)^{-1} \xrightarrow{X \rightarrow x_k} \frac{1}{x_k} \cdot P'(x_k)^{-1} = \frac{1}{x_k P'(x_k)}$$

En faisant tendre X vers x_k dans l'égalité (*), on obtient $\lambda_k = \frac{1}{x_k P'(x_k)}$. Ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_k = \frac{1}{x_k P'(x_k)}$$

- (d) En multipliant par X dans l'égalité de la question 3.(a), on a :

$$\frac{1}{P} = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{X}{X - x_k}$$

Comme $\deg(P) = n \geq 1$, on a $\frac{1}{P(X)} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$. De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a aussi $\frac{X}{X - x_k} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 1$. Ainsi, en faisant tendre X vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus, il vient :

$$0 = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n \lambda_k,$$

ce que l'on peut réécrire, compte-tenu des valeurs obtenues des coefficients $\lambda_0, \dots, \lambda_n$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}$$

Problème (valeur de $\zeta(2)$).

Partie A : Étude de la fonction cotangente

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in D \iff \sin(x) \neq 0 \iff x \notin \pi\mathbb{Z}$$

donc :

$$D = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv 0 \pmod{\pi}\}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x, x \pm \pi \in D$ et :

$$\cotan(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = -\cotan(x)$$

car $\cos$ est paire sur $\mathbb{R}$ tandis que $\sin$ est impaire, et :

$$\cotan(x + \pi) = \frac{\cos(x + \pi)}{\sin(x + \pi)} = \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = \cotan(x)$$

Ainsi :

$$\text{la fonction cotan est impaire et } \pi\text{-périodique sur } D$$

3. La fonction cotan est dérivable sur $]0, \pi[$ comme quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et :

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \cotan'(x) = \frac{-\sin(x)^2 - \cos(x)^2}{\sin(x)^2} = -\frac{1}{\sin(x)^2} < 0$$

Donc :

$$\text{la fonction cotan est (strictement) décroissante sur }]0, \pi[$$

Sachant que $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$, $\sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^+$ et $\sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi^-} 0^+$, on a d'après les propriétés sur les limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotan(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} \cotan(x) = -\infty$$

4. Pour tout $x \in]0, \pi[$, on a $\pi - x \in]0, \pi[\subset D$ et (et utilisant les formules d'addition du cosinus et du sinus) :

$$\cotan(\pi - x) = \frac{\cos(\pi - x)}{\sin(\pi - x)} = \frac{-\cos(x)}{-(-\sin(x))} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Ainsi :

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad \cotan(\pi - x) = -\cotan(x)$$

5. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On a $\cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)}$. Or $\tan(x) \geq x > 0$ donc $0 \leq \frac{1}{\tan(x)} \leq \frac{1}{x}$ (par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$) puis $\frac{1}{\tan(x)^2} \leq \frac{1}{x^2}$ (par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$), ce qui fournit l'inégalité de gauche. De plus :

$$\cotan(x)^2 = \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2} = \frac{1 - \sin(x)^2}{\sin(x)^2} = \frac{1}{\sin(x)^2} - 1 \quad \text{donc} \quad \cotan(x)^2 + 1 = \frac{1}{\sin(x)^2} \geq \frac{1}{x^2}$$

et utilisant cette fois l'inégalité fournie dans l'énoncé pour le sinus (et à nouveau les monotonies des fonctions inverse et carré). Finalement :

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad \cotan(x)^2 \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cotan(x)^2$$

Partie B : Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$

6. (a) On sait que l'ensemble $\text{Rac}_{\mathbb{C}}(U_n)$ des racines complexes de U_n est celui des racines $(2n+1)^e$ de l'unité, *i.e.* :

$$\text{Rac}_{\mathbb{C}}(U_n) = \mathbb{U}_{2n+1} = \left\{ e^{i \frac{2k\pi}{2n+1}} \mid k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket \right\}$$

On sait aussi que la factorisation de U_n dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$U_n = \prod_{k=0}^{2n} \left(X - e^{i \frac{2k\pi}{2n+1}} \right)$$

- (b) Remarquons que i n'est pas racine de P_n (en effet, $P_n(i) = (2i)^{2n+1} \neq 0$). Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On résout :

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 &\iff (z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1} = 0 \iff \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^{2n+1} = 1 \quad (\text{ce qui est licite car } z \neq i) \\ &\iff \frac{z+i}{z-i} \in \text{Rac}_{\mathbb{C}}(U_n) \\ &\iff \exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, \frac{z+i}{z-i} = e^{i \frac{2k\pi}{2n+1}} \end{aligned}$$

car $\frac{z+i}{z-i} \neq 1$. Soit $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{z+i}{z-i} = e^{i \frac{2k\pi}{2n+1}} &\iff z+i = e^{i \frac{2k\pi}{2n+1}} z - i e^{i \frac{2k\pi}{2n+1}} \\ &\iff z \left(1 - e^{i \frac{2k\pi}{2n+1}} \right) = -i \left(1 + e^{i \frac{2k\pi}{2n+1}} \right) \\ &\iff z = -i \frac{1 + e^{i \frac{2k\pi}{2n+1}}}{1 - e^{i \frac{2k\pi}{2n+1}}} = -i \frac{e^{i \frac{k\pi}{2n+1}} (e^{i \frac{k\pi}{2n+1}} + e^{-i \frac{k\pi}{2n+1}})}{e^{i \frac{k\pi}{2n+1}} (e^{i \frac{k\pi}{2n+1}} - e^{-i \frac{k\pi}{2n+1}})} \\ &\iff z = -i \times \frac{2 \cos \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)}{-2i \sin \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} = \cotan \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\text{les racines de } P_n \text{ sont les nombres } \alpha_k = \cotan \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \text{ où } k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$$

7. Soit $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$. On a :

$$\alpha_{2n+1-k} = \cotan \left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1} \right) = \cotan \left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1} \right)$$

Or $0 < k < 2n$ donc $\frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \pi[$. En appliquant la question 4. avec $x = \frac{k\pi}{2n+1}$, on a :

$$\alpha_{2n+1-k} = -\cotan \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) = -\alpha_k$$

Autrement dit :

$$\forall k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, \quad \alpha_k = -\alpha_{2n+1-k}$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, 2n-1 \rrbracket$, on a clairement $0 < \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{(k+1)\pi}{2n+1} < \pi$ et, comme la fonction $\cotan$ décroît strictement sur $]0, \pi[$, il vient $\cotan \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) > \cotan \left(\frac{(k+1)\pi}{2n+1} \right)$, *i.e.* $\alpha_k > \alpha_{k+1}$. Ainsi, la suite $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq 2n}$ est strictement décroissante. En particulier :

$$\text{les nombres } \alpha_1, \dots, \alpha_{2n} \text{ sont deux à deux distincts}$$

8. On a déterminé les racines du polynôme P_n à la question 6.(b) (il s'agit des nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$) donc on a la factorisation suivante :

$$P_n = C_{P_n} \prod_{k=1}^{2n} (X - \alpha_k) = C_{P_n} \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) \prod_{k=n+1}^{2n} (X - \alpha_k)$$

En effectuant le changement d'indice $\ell = 2n + 1 - k$ dans le deuxième produit, puis en utilisant la relation sur les nombres α obtenue à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} P_n &= C_{P_n} \prod_{\ell=1}^n (X - \alpha_\ell) \prod_{\ell=1}^n (X - \alpha_{2n+1-\ell}) = C_{P_n} \prod_{\ell=1}^n (X - \alpha_\ell) \prod_{\ell=1}^n (X + \alpha_\ell) \\ &= C_{P_n} \prod_{\ell=1}^n ((X - \alpha_\ell)(X + \alpha_\ell)) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$P_n = C_{P_n} \prod_{k=1}^n (X^2 - \alpha_k^2)$$

Partie C : Démonstration d'une identité liée à la fonction cotan²

9. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k X^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k i^k X^{2n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k [1 - (-1)^k] X^{2n+1-k} \end{aligned}$$

Or :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n+1 \rrbracket, \quad 1 - (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{et} \quad i^{2k+1} = (i^2)^k \times i = i(-1)^k$$

donc (on ne conserve que les entiers k s'écrivant sous la forme $k = 2\ell + 1$ dans la somme) :

$$P_n = 2i \sum_{\ell=0}^n \binom{2n+1}{2\ell+1} (-1)^\ell X^{2(n-\ell)}$$

10. Pour $k = 0$, le coefficient dans la somme précédente vaut $2i \binom{2n+1}{1} (-1)^0 = 2i(2n+1) \neq 0$ donc :

$$C_{P_n} = 2i(2n+1)$$

11. On a $P_n = C_{P_n} (X^2 - \alpha_1^2)(X^2 - \alpha_2^2) \dots (X^2 - \alpha_n^2)$. Le coefficient du monôme de degré $2n - 2$ de P_n vaut :

$$C_{P_n} (-\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \dots - \alpha_n^2) = -C_{P_n} \sum_{k=1}^n \cotan \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)^2$$

D'autre part, ce coefficient vaut (d'après la question 9. et pour $k = 1$) :

$$2i \binom{2n+1}{3} (-1)^1 = -2i \times \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{3 \times 2} = -i \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{3}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^n \cotan \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)^2 = \frac{1}{C_{P_n}} \times i \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{3} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

Finalement :

$$\sum_{k=1}^n \cotan \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)^2 = \frac{n(2n-1)}{3}$$

Partie D : Conclusion

12. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $\frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc, d'après la question 5., on a :

$$\cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 + 1$$

soit encore, en multipliant par $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \geq 0$:

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 + \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}$$

En sommant ces inégalités, et en notant σ la somme calculée à la question 11., on obtient :

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \sigma \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \sigma + \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \sum_{k=1}^n 1$$

i.e. (connaissant la valeur de σ) :

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \frac{n(2n-1)}{3} + \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} + \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2}}$$

13. En factorisant (on peut aussi utiliser les équivalents), on montre facilement que :

$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et que} \quad \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n \geq 1} \text{ est convergente de limite } \frac{\pi^2}{6}}$$

Autrement dit :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6} \quad \text{ce que l'on réécrit} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$