Devoir Surveillé 6

un corrigé

Exercice 1 (dérivées successives).

1. Les fonctions $x \longmapsto x^2+4$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, par produit,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Leibniz, on a, en notant $u : t \longmapsto t^2+4$ et $v : t \longmapsto \mathrm{e}^t$,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)\, \underbrace{v^{(n-k)}(x)}_{=\mathrm{e}^x} \\
&= \binom{n}{0}(x^2+4)\,\mathrm{e}^x + \binom{n}{1} 2x\,\mathrm{e}^x + \binom{n}{2} \times 2\,\mathrm{e}^x + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{u^{(k)}(x)}_{=0}\, \mathrm{e}^x}_{=0} \\
&= \left(x^2+4+2nx+\frac{n(n-1)}{2} \times 2\right) \mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = (x^2+2nx+n^2-n+4)\,\mathrm{e}^x}$$

2. La fonction $x \longmapsto 3+4x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}\right\}$ et ne s'y annule pas donc :

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est définie et de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } E = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}\right\}}$$

Montrons maintenant la formule annoncée à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

- ⋆ On a $g^{(0)} = g$ et :

$$\forall x \in E, \qquad \frac{(-1)^0 2^{2\times 0+1} 0\,!}{(3+4x)^{0+1}} = \frac{2}{3+4x} = g(x)$$

donc l'égalité est vraie au rang $n=0$.

- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$\forall x \in E, \qquad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n 2^{2n+1} n\,!}{(3+4x)^{n+1}} = (-1)^n 2^{2n+1} n\,!(3+4x)^{-n-1}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\forall x \in E, \qquad g^{(n+1)}(x) &= \left(g^{(n)}\right)'(x) \\
&= (-1)^n 2^{2n+1} n\,! \times (-n-1) \times 4 \times (3+4x)^{-n-2} \\
&= (-1)^n \times (-1) \times 2^2 \times 2^{2n+1} n\,! \times (n+1) \times (3+4x)^{-n-2} \\
&= (-1)^{n+1} 2^{2(n+1)+1} (n+1)\,! \times \frac{1}{(3+4x)^{n+2}}
\end{aligned}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in E, \qquad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n 2^{2n+1} n\,!}{(3+4x)^{n+1}}}$$

Exercice 2 (étude d'une suite récurrente).

1. **Question préliminaire.**
   La fonction g est continue sur $[a,b]$ comme différence de fonctions qui le sont. De plus, comme $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à $[a,b]$ par hypothèse (en effet, f est à valeurs dans $[a,b]$), on a :

   $$g(a) = f(a) - a \geqslant a - a = 0 \qquad \text{et} \qquad g(b) = f(b) - b \leqslant b - b = 0$$

   Ainsi, $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes contraires donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$, *i.e.* tel que $f(c) - c = 0$. Autrement dit :

   $$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet au moins un point fixe dans } [a,b]}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions ln et $\sqrt{\cdot}$ sont respectivement définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+$ donc :

   $$x \in \mathscr{D}_\varphi \iff \left\{\begin{array}{c} x > 0 \\ 2 - \ln(x) \geqslant 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x > 0 \\ \ln(x) \leqslant 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x > 0 \\ x \leqslant \mathrm{e}^2 \end{array}\right.$$

   par croissance stricte de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

   $$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est définie sur } \mathscr{D}_\varphi =]0, \mathrm{e}^2]}$$

3. Les fonctions ln et $x \longmapsto \sqrt{x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, en reprenant le raisonnement précédent, on obtient que :

   $$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est dérivable sur } D_\varphi =]0, \mathrm{e}^2[}$$

   De plus :

   $$\forall x \in D_\varphi, \qquad \varphi'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{2 - \ln(x)}} = -\frac{1}{2x\sqrt{2-\ln(x)}} < 0$$

   Ainsi, la fonction φ est strictement décroissante sur $]0, \mathrm{e}^2]$.

x	0		e^2
$\varphi(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0

4. (a) D'après ce qui précède, on a :

   $$\varphi([1,\mathrm{e}]) = [\varphi(\mathrm{e}), \varphi(1)] = \left[1, \sqrt{2}\right]$$

   Or $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{4}$, donc $\sqrt{2} \leqslant 2 \leqslant \mathrm{e}$ (d'après l'inégalité donnée au début de l'exercice). Ainsi, $[1, \sqrt{2}] \subset [1, \mathrm{e}]$. Par conséquent :

   $$\boxed{\text{l'intervalle } [1,\mathrm{e}] \text{ est stable par la fonction } \varphi}$$

   (b) La restriction de φ à l'intervalle $[1,\mathrm{e}]$ est à valeurs dans $[1,\mathrm{e}]$ d'après la question précédente.

   ⋆ Comme cette fonction est continue sur $[1,\mathrm{e}]$, la question préliminaire assure l'existence d'un point fixe pour φ dans $[1,\mathrm{e}]$.

- ⋆ Par ailleurs, la fonction $g : x \longmapsto \varphi(x) - x$ est une somme de fonctions strictement décroissantes sur $[1, \mathrm{e}]$. Ainsi, g est injective sur $[1, \mathrm{e}]$ donc g s'annule une unique fois sur $[1, \mathrm{e}]$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ admet un unique point fixe dans } [1, \mathrm{e}]}$$

5. On a :

$$\boxed{u_0 \in [1, \mathrm{e}] \text{ et } [1, \mathrm{e}] \text{ est stable par } \varphi \text{ donc pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } u_n \in [1, \mathrm{e}]}$$

par une récurrence immédiate.

6. (a) On sait que φ est dérivable sur $[1, \mathrm{e}]$ (puisqu'elle l'est sur D_φ qui contient $[1, \mathrm{e}]$) et :

$$\forall x \in [1, \mathrm{e}], \qquad |\varphi'(x)| = \frac{1}{2x\sqrt{2 - \ln(x)}}$$

Soit $x \in [1, \mathrm{e}]$. On a $\ln(x) \leqslant 1$ puis $2 - \ln(x) \geqslant 1$. Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, il vient $\sqrt{2 - \ln(x)} \geqslant 1$. Par ailleurs, $2x \geqslant 2$ donc, en multipliant terme à terme, on obtient $2x\sqrt{2 - \ln(x)} \geqslant 2$. En passant à l'inverse, on en déduit que $\dfrac{1}{2x\sqrt{2 - \ln(x)}} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Autrement dit :

$$\forall x \in [1, \mathrm{e}], \qquad |\varphi'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

D'après le théorème sur l'inégalité des accroissements finis, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est } \frac{1}{2}\text{-lipschitzienne sur } [1, \mathrm{e}]}$$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$\forall x, y \in [1, \mathrm{e}], \qquad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \frac{1}{2} \times |x - y|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n, \ell \in [1, \mathrm{e}]$, on a :

$$|\varphi(u_n) - \varphi(\ell)| \leqslant \frac{|u_n - \ell|}{2}$$

Or $\varphi(u_n) = u_{n+1}$ et $\varphi(\ell) = \ell$ (car ℓ est un point fixe de φ) donc on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2} \times |u_n - \ell|}$$

(c) On utilise un raisonnement par récurrence.

- ⋆ On sait que $u_0 = 1$ et que $\ell \in [1, \mathrm{e}]$ donc $\ell - 1 \leqslant 0$ et :

$$|u_0 - \ell| = |1 - \ell| = \ell - 1 \leqslant \mathrm{e} - 1 = \frac{\mathrm{e} - 1}{2^0}$$

L'inégalité est donc vérifiée au rang $n = 0$.

- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2^n}$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2} \times |u_n - \ell| &\leqslant \frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{e} - 1}{2^n} \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{\mathrm{e} - 1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

donc l'inégalité est vérifiée au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{\mathrm{e} - 1}{2^n}}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$-\frac{\mathrm{e}-1}{2^n} \leqslant u_n - \ell \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{2^n} \qquad \text{puis} \qquad \ell - \frac{\mathrm{e}-1}{2^n} \leqslant u_n \leqslant \ell + \frac{\mathrm{e}-1}{2^n}$$

Or $\ell \pm \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\text{la suite } u \text{ est convergente de limite } \ell}$$

Exercice 3 (convexité).

1. La fonction $f \in \mathbb{R}^I$ est dite convexe sur I si :

$$\boxed{\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1], \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)}$$

2. On suppose que f est convexe sur $\mathbb{R}$ et que g est concave sur $\mathbb{R}$. On pose $h = f - g$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$. Par hypothèse, on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{$*$}$$

et :

$$g(\lambda + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) \qquad \textit{i.e.} \qquad -g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant -\lambda g(x) - (1-\lambda) g(y) \tag{$**$}$$

En sommant les inégalités $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) - g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda\big[f(x) - g(x)\big] + (1-\lambda)\big[f(y) - g(y)\big],$$

i.e. :

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y)$$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est convexe sur } \mathbb{R}}$$

3. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(t) = \ln(t) + t \times \frac{1}{t} = \ln(t) + 1$$

La fonction f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (car la fonction ln l'est). D'après le critère de convexité pour les fonctions dérivables, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+^*}$$

(b) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Le choix $\lambda = \dfrac{1}{2} \in [0,1]$ dans la définition de la convexité fournit l'inégalité :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y) \qquad \textit{i.e.} \qquad \frac{x+y}{2} \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{x\ln(x) + y\ln(y)}{2}$$

En multipliant par $2 \geqslant 0$, on a bien :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant x\ln(x) + y\ln(y)}$$