

DEVOIR SURVEILLÉ 6

un corrigé

Exercice 1 (convexité).

1. La fonction $f \in \mathbb{R}^I$ est convexe sur I si :

$$\boxed{\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)}$$

2. (a) La fonction φ est deux fois dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ comme composition de fonctions dérivables et :

$$\forall x > -\frac{1}{2}, \quad \varphi'(x) = -\frac{2}{1+2x} \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = \frac{4}{(1+2x)^2} \geq 0$$

donc :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est convexe sur } \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[}$$

- (b) Soit $x, y \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Comme φ est convexe, on a puisque $\frac{1}{2} \in [0, 1]$:

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\ln(1+2x) + \ln(1+2y)}{2} \leq \ln(1+x+y)$$

soit encore $\ln(\sqrt{(1+2x)(1+2y)}) \leq \ln(1+x+y)$. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on peut conclure que :

$$\boxed{\sqrt{(1+2x)(1+2y)} \leq 1+x+y}$$

Exercice 2 (étude d'une suite).

Partie A : étude d'une fonction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule (uniquement) en 1 donc :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff (x > 0 \text{ et } x \neq 1) \iff x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$$

Donc :

$$\boxed{\mathcal{D}_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[}$$

2. Comme $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$, on a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ (opérations sur les limites). Ainsi :

$$\boxed{\text{on peut prolonger } f \text{ par continuité en 0 en posant } f(0) = 0}$$

3. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0$$

donc :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0}$$

4. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ comme quotient de fonctions qui le sont et elle est dérivable en 0 (cf. question précédente). Il reste à montrer que la fonction f' est continue en 0. On a $f'(0) = 0$ et :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2} = \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)^2}$$

Comme $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$, on a $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 = f'(0)$. Ainsi, f' est continue en 0. Finalement :

la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$

5. D'après la question précédente, le signe de f sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ est celui de $x \mapsto \ln(x) - 1$. Par croissance stricte de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \quad f'(x) \geq 0 \iff \ln(x) - 1 \geq 0 \iff x \geq e$$

On en déduit le tableau de variations de f suivant sur son domaine de définition :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		—	—	+
f	0	$-\infty$	e	$+\infty$

La limite de f en $+\infty$ est une conséquence immédiate du théorème relatif aux croissances comparées (et celles en 1 sont claires).

Partie B : étude d'une suite

6. On utilise un raisonnement par récurrence.

- ★ On nous donne l'inégalité $3 \geq e$ donc $v_0 \geq e$ et l'inégalité est vraie au rang 0.
- ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n \geq e$. La fonction f étant croissante sur $[e, +\infty[$, on a $f(v_n) \geq f(e)$, c'est-à-dire $v_{n+1} \geq e$. L'inégalité est donc vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq e$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n > 0$ (puisque $v_n \geq e$) et :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{\ln(v_n)} \leq 1$$

car $\ln(v_n) \geq 1$ (par croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et car $v_n \geq e$) et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. On conclut donc que la suite v est décroissante. Par ailleurs, v est minorée par e donc (d'après le théorème de la limite monotone) :

la suite v est convergente

8. (a) Soit $x \in [e, +\infty[$. On sait que $f'(x) \geq 0$ (la positivité de f' sur l'intervalle $[e, +\infty[$ a été établie à la question 5.). De plus :

$$\frac{1}{4} - f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{\ln(x)^2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln(x)} \right)^2 \geq 0,$$

c'est-à-dire $f'(x) \leq \frac{1}{4}$. Ainsi :

$$\forall x \in [e, +\infty[, \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$$

Remarque : bien entendu, on peut également s'en sortir en étudiant les variations de la fonction f' sur $[e, +\infty[$.

- (b) Le théorème relatif à l'inégalité des accroissements finis s'énonce comme suit :

Soient I un intervalle non vide et non réduit à un point et soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad |g'(x)| \leq K$$

Alors g est K -lipschitzienne sur I , c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in I, \quad |g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$$

- (c) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[e, +\infty[$ et la fonction $|f'|$ est majorée par $\frac{1}{4}$ sur $[e, +\infty[$ d'après la question 8.(a). D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors :

$$\forall x, y \in [e, +\infty[, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4} \times |x - y|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les nombres v_n et e appartiennent à $[e, +\infty[$ (d'après la question 6. pour v_n) donc :

$$|f(v_n) - f(e)| \leq \frac{1}{4} \times |v_n - e|$$

Mais $f(v_n) = v_{n+1}$ et $f(e) = e$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_{n+1} - e| \leq \frac{|v_n - e|}{4}$$

- (d) On utilise un raisonnement par récurrence.

★ On a :

$$|v_0 - e| = 3 - e \leq 1$$

car on sait que $2 \leq e \leq 3$ (donc $0 \leq 3 - e \leq 1$). L'inégalité est donc vraie au rang 0.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $|v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$. En utilisant la question précédente puis l'hypothèse de récurrence, on a :

$$|v_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4} \times |v_n - e| \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n}$$

car $\frac{1}{4} \geq 0$. Ainsi, $|v_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$ et l'inégalité est vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on conclut donc bien que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$$

On a $\frac{1}{4^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc :

la suite v est convergente de limite e

9. Comme $4^5 > 10^3$, on a $4^{20} > 10^{12}$. Pour tout entier $n \geq 20$, on a $4^n \geq 4^{20}$ donc :

$$|v_n - e| \leq \frac{1}{4^n} \leq \frac{1}{4^{20}} \leq 10^{-12}$$

Ainsi :

à partir du rang $n_1 = 20$, les termes de la suite v fournissent une valeur approchée de e à 10^{-12} près

Problème (exponentielle de matrices).

Partie I : cas d'une matrice nilpotente

1. Soit $s, t \in \mathbb{R}$. Par bilinéarité du produit matriciel, on a (on utilise également le fait que I_p est l'élément neutre pour le produit matriciel) :

$$\begin{aligned} E(s)E(t) &= \left(I_p + sA + \frac{s^2}{2}A^2 \right) \left(I_p + tA + \frac{t^2}{2}A^2 \right) \\ &= I_p + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + sA + stA^2 + \frac{st^2}{2}A^3 + \frac{s^2}{2}A^2 + \frac{s^2t}{2}A^3 + \frac{s^2t^2}{4}A^4 \end{aligned}$$

Or A est nilpotente d'indice 3 donc $A^3 = A^4 = 0_p$. Il reste :

$$\begin{aligned} E(s)E(t) &= I_p + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + sA + stA^2 + \frac{s^2}{2}A^2 \\ &= I_p + (s+t)A + \frac{s^2 + 2st + t^2}{2}A^2 \\ &= I_p + (s+t)A + \frac{(s+t)^2}{2}A^2 \\ &= E(s+t) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad E(s+t) = E(s)E(t)}$$

2. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , la propriété :

$$\mathcal{P}_n : \ll \forall t \in \mathbb{R}, (E(t))^n = E(nt) \gg$$

est vraie.

★ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(E(t))^0 = I_p$ et :

$$E(0 \times t) = I_p + 0 \times A + \frac{0^2}{2} \times A^2 = I_p = (E(t))^0$$

donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} (E(t))^{n+1} &= E(t)(E(t))^n = E(t)E(nt) \quad (\text{car } \mathcal{P}_n \text{ est vraie}) \\ &= E(t+nt) \quad (\text{d'après la question 1.}) \\ &= E((n+1)t) \end{aligned}$$

donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad (E(t))^n = E(nt)}$$

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a (d'après la question 1.) :

$$E(t)E(-t) = E(t + (-t)) = E(0) = I_p \quad \text{et} \quad E(-t)E(t) = E((-t) + t) = E(0) = I_p$$

donc :

$$\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ la matrice } E(t) \text{ est inversible d'inverse } (E(t))^{-1} = E(-t)}$$

4. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On suppose que :

$$aI_p + bA + cA^2 = 0_p \quad (*)$$

★ En multipliant par A^2 dans cette égalité, et en utilisant la bilinéarité du produit matriciel, on obtient :

$$aA^2 + bA^3 + cA^4 = A^2 \times 0_p = 0_p$$

Or A est nilpotente d'indice trois donc $A^3 = A^4 = 0_p$ (et $A^2 \neq 0_p$). Il reste $aA^2 = 0_p$. Mais $A^2 \neq 0_p$ donc $a = 0$.

★ L'égalité (*) devient $bA + cA^2 = 0_p$. En multipliant maintenant par A , il vient $bA^2 + cA^3 = 0_p$, c'est-à-dire $bA^2 = 0_p$ (car $A^3 = 0_p$). Ainsi, $b = 0$ (puisque $A^2 \neq 0_p$).

★ L'égalité (*) s'écrit finalement $cA^2 = 0_p$ avec $A^2 \neq 0_p$ donc $c = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad aI_p + bA + cA^2 \implies a = b = c = 0}$$

5. Soient $s, t \in \mathbb{R}$. On suppose que $E(s) = E(t)$, c'est-à-dire :

$$I_p + sA + \frac{s^2}{2}A^2 = I_p + tA + \frac{t^2}{2}A^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 \times I_p + (s-t)A + \frac{s^2 - t^2}{2}A^2 = 0_p$$

Or on a montré à la question précédente que la seule combinaison linéaire $aI_p + bA + cA^2$ qui donne la matrice nulle 0_p est celle pour laquelle $a = b = c = 0$. On a donc $s - t = 0$ et $\frac{s^2 - t^2}{2} = 0$. Ainsi, $s = t$ et donc :

l'application E est injective

6. Par simple calcul :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_3 \text{ et } A^3 = 0_3 \text{ donc } A \text{ est nilpotente d'indice trois}$$

et :

pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $E(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie II : le cas particulier $p = 2$

7. On a $\det(P) = 3 \times 1 - 2 \times 1 = 1 \neq 0$ donc :

$$P \text{ est inversible d'inverse } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

De plus :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est une matrice diagonale}$$

8. Comme D est une matrice diagonale, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On démontre ensuite la relation proposée à l'aide d'une récurrence simple.

★ On a $A^0 = I_2$ et $D^0 = I_2$ donc :

$$PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0$$

L'égalité est donc vraie au rang 0.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = PD^nP^{-1}$. L'égalité $D = P^{-1}AP$, obtenue à la question 7. se réécrit, en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} (et en utilisant l'associativité du produit matriciel) :

$$PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = I_2AI_2 = A$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= PDI_2D^nP^{-1} \\ &= PDD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En exploitant cette relation :

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2^n & 2 \\ 2^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 3 \times 2^n - 2 & -3 \times 2^{n+1} + 6 \\ 2^n - 1 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}$$

9. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 3 \times 2^k - 2 & -3 \times 2^{k+1} + 6 \\ 2^k - 1 & -2^{k+1} + 3 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{aligned} a_n(t) &= 3 \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}, & b_n(t) &= -6 \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} + 6 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \\ \text{et :} & & & \\ c_n(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}, & d_n(t) &= -2 \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} + 3 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \end{aligned}$$

10. Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après le résultat admis, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = e^t$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} = e^{2t}$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(t) = 3e^{2t} - 2e^t, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(t) = -6e^{2t} + 6e^t, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(t) = e^{2t} - e^t \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(t) = -2e^{2t} + 3e^t$$

d'où l'on tire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad E(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & -6e^{2t} + 6e^t \\ e^{2t} - e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix}$$

11. Il est clair que :

$$\text{en posant } Q = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ on a } E(t) = e^{2t} Q + e^t R \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

12. On obtient :

$$Q^2 = Q, \quad R^2 = R, \quad QR = RQ = 0_2$$

13. Soit $s, t \in \mathbb{R}$. Par bilinéarité du produit matriciel, on a :

$$\begin{aligned} E(s)E(t) &= (e^{2s} Q + e^s R)(e^{2t} Q + e^t R) = e^{2(t+s)} Q^2 + e^{2s+t} QR + e^{s+2t} RQ + e^{t+s} R^2 \\ &= e^{2(t+s)} Q + e^{t+s} R \end{aligned}$$

d'après la question précédente. Ainsi :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad E(s+t) = E(s)E(t)$$

La même récurrence que celle menée à la question 2. fournit :

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad (E(t))^n = E(nt)$$

et, comme à la question 3. :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ la matrice } E(t) \text{ est inversible d'inverse } E(-t)$$

Soit $s, t \in \mathbb{R}$ tel que $E(s) = E(t)$. D'après la question 10., on a :

$$\begin{pmatrix} 3e^{2s} - 2e^s & -6e^{2s} + 6e^s \\ e^{2s} - e^s & -2e^{2s} + 3e^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & -6e^{2t} + 6e^t \\ e^{2t} - e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix}$$

On a donc (entre autre) $3e^{2s} - 2e^s = 3e^{2t} - 2e^t$ et $e^{2s} - e^s = e^{2t} - e^t$. En résolvant ce système formé par ces deux équations, on obtient ($e^{2s} = e^{2t}$ et) $e^s = e^t$. L'injectivité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ entraîne que $s = t$. Ainsi :

$$\text{l'application } E \text{ est injective}$$