Devoir Surveillé 6

durée de l'épreuve : 2h

- *La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir.*
- *Les résultats non encadrés à la* ***règle*** *ne seront pas pris en compte dans la notation.*
- *La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

Exercice 1 (dérivées successives).

1. Justifier que la fonction :
$$f : x \longmapsto (x^2+4)\,\mathrm{e}^x$$
est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un ensemble à préciser et calculer pour tout entier naturel n la fonction $f^{(n)}$ (*i.e.* la dérivée n^{e} de f).
2. Soit $g : x \longmapsto \dfrac{2}{3+4x}$. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un ensemble E à préciser et montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in E, \qquad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times 2^{2n+1} \times n\,!}{(3+4x)^{n+1}}$$

Exercice 2 (étude d'une suite récurrente).

Dans cet exercice, on pourra utiliser librement le fait que le nombre $\mathrm{e} = \exp(1)$ *est tel que* $2 < \mathrm{e} < 3$.

1. **Question préliminaire.**
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ une fonction continue sur $[a,b]$ et à valeurs dans $[a,b]$. En considérant la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$, montrer que la fonction f admet *au moins un* point fixe dans $[a,b]$, *i.e.* que :
$$\exists\, c \in [a,b], \qquad f(c) = c$$

On considère la fonction φ d'expression :
$$\varphi(x) = \sqrt{2 - \ln(x)}$$

2. Déterminer le domaine de définition, noté $\mathscr{D}_\varphi$, de la fonction φ.
3. Déterminer le domaine de dérivabilité, noté D_φ, de φ, et vérifier que :
$$\forall x \in D_\varphi, \qquad \varphi'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{2-\ln(x)}}$$
4. (a) Montrer que l'intervalle $[1, \mathrm{e}]$ est stable par la fonction φ.
   (b) En utilisant la question préliminaire, justifier que φ admet un *unique* point fixe dans $[1, \mathrm{e}]$. *Dans la suite, ce point fixe sera noté ℓ.*

On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \varphi(u_n)$$

5. Donner l'argument qui permet de justifier le fait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [1, \mathrm{e}]$$

6. (a) Montrer que la fonction φ est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur l'intervalle $[1, \mathrm{e}]$.

   (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2} \times |u_n - \ell|$$

   (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{\mathrm{e} - 1}{2^n}$$

   (d) Conclure que la suite u converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 (convexité).

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient I un intervalle non vide et non réduit à un point et $f \in \mathbb{R}^I$. Donner la définition de « f est une fonction convexe sur I ».
2. Soient $f, g \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f est convexe sur $\mathbb{R}$ et que g est concave sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $h = f - g$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
3. On considère la fonction $f : t \longmapsto t\ln(t)$.
   (a) Montrer que f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) En déduire que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant x\ln(x) + y\ln(y)$$

– FIN DE L'ÉPREUVE –