

DEVOIR SURVEILLÉ 5

durée de l'épreuve : 4h

- La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir.
- Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

Exercice 1 (étude d'une suite implicite).

Soient n un entier naturel et a un nombre réel strictement positif. On se propose d'étudier les solutions réelles de l'équation :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+n} = a \quad (\text{E}_n)$$

i.e. de :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{x+k} = a \quad (\text{E}_n)$$

À cet effet, on introduit la fonction suivante :

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{1}{x+k} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+n}$$

définie sur $\mathcal{D} \setminus \{-n, -(n-1), \dots, -1, 0\}$.

1. Résoudre les équations (E_0) et (E_1) .

Désormais, n désigne un entier naturel quelconque.

2. Dénombrement des solutions de l'équation (E_n)

- (a) Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

Dans toute la suite du problème, on note x_n cette unique solution.

- (b) Combien l'équation (E_n) admet-elle de solutions dans $\mathbb{R}$? Justifier.

3. Étude rapide de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier le signe de la fonction $f_{n+1} - f_n$ sur $]0, +\infty[$.

- (b) En déduire le sens de variation de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Comportement de x_n quand n tend vers $+\infty$

- (a) Montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{x} \leq \ln(x) - \ln(x-1) \leq \frac{1}{x-1}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que pour tout nombre réel strictement positif x , on a :

$$f_n(x) - \frac{1}{x} \leq \ln \left(1 + \frac{n}{x} \right) \leq f_n(x) - \frac{1}{x+n}$$

puis :

$$a - \frac{1}{x_n} \leq \ln \left(1 + \frac{n}{x_n} \right) \leq a - \frac{1}{x_n + n}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x_n \geq \frac{n}{e^a - 1}$.

(d) En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{n}{x_n} \right) = a$.

(e) Montrer finalement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(e^a - 1)x_n}{n} = 1$$

Exercice 2 (méthode de Newton).

La démonstration du théorème des valeurs intermédiaires que nous avons vue en classe repose sur le principe de dichotomie : nous avons construit deux suites de points qui convergent vers le point d'annulation c de la fonction. La vitesse de convergence est (au plus) géométrique de raison $\frac{1}{2}$ (car, d'une étape à la suivante, on divise par 2 la longueur de l'intervalle contenant la solution cherchée).

Dans cet exercice, on propose une autre méthode, appelée méthode de Newton, dans laquelle on construit une suite de points qui converge plus rapidement vers le point d'annulation c de la fonction.

On rappelle l'inégalité triangulaire pour les intégrales, qui peut être utile dans cet exercice.

Théorème (inégalité triangulaire)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leq \beta$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$. Alors :

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) \, dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(x)| \, dx$$

On considère deux nombres réels a et b tels que $a < b$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que :

(H₁) $\forall x \in [a, b], f'(x) < 0$;

(H₂) $\forall x \in [a, b], f''(x) \geq 0$;

(H₃) $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

Partie 1 : Description de la méthode de Newton

1. Montrer qu'il existe un unique nombre $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

2. (a) Soit $u \in [a, b]$. Montrer que l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse u et de l'axe des abscisses est égal à $u - \frac{f(u)}{f'(u)}$.

(b) Soit la fonction :

$$g : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_0 \in [a, c]$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = g(x_n)$$

Représenter graphiquement la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. (a) Étudier le sens de variations de g sur $[a, b]$.
 (b) Établir que $g([a, c]) \subset [a, c]$. Que peut-on en déduire pour la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Partie 2 : Convergence de la méthode de Newton

4. (a) Étudier le sens de variation de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 (b) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite c .
 5. (a) Justifier qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in [a, b], \quad |f'(x)| \geq m \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq M$$

- (b) Soit $x \in [a, c]$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$f(c) = f(x) + (c - x)f'(x) + \int_x^c (c - t)f''(t) dt$$

En déduire encore que :

$$|g(x) - c| \leq (x - c)^2 \frac{M}{2m}$$

- (c) On pose $K = \frac{M}{2m} > 0$. Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K|x_N - c| < 1$.
 (d) Montrer que :

$$\forall n \geq N, \quad |x_n - c| \leq K^{2^{n-N}-1} |x_N - c|^{2^{n-N}}$$

- (e) En déduire l'existence de deux constantes $C > 0$ et $k \in [0, 1[$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies |x_n - c| \leq Ck^{2^n}$$

Remarque. Cette convergence est plus rapide qu'une convergence géométrique de raison $\frac{1}{2}$ car :

$$\frac{k^{2^n}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2^n e^{\ln(k)2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par croissances comparées car $\ln(k) < 0$ (puisque $k \in]0, 1[$) et car $2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 3 (arithmétique).

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

I – Un théorème de Faulhaber

Dans cette première partie, nous allons démontrer un théorème attribué au mathématicien Johann FAULHABER (1580-1635).

Théorème (J. Faulhaber)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier naturel q **impair**, l'entier $\sum_{k=1}^n k$ divise l'entier $\sum_{k=1}^n k^q$.

Pour tous $n, q \in \mathbb{N}^*$, on posera :

$$S_n(q) = \sum_{k=1}^n k^q$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que les entiers n et $n + 1$ sont premiers entre eux.
2. On démontre dans cette question le théorème dans le cas particulier $q = 3$.
 - (a) Justifier l'existence d'un polynôme P de degré inférieur ou égal à 4 à déterminer tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+1) - P(x) = x^3$$
 - (b) En déduire la valeur de $S_n(3)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (c) Démontrer le théorème pour $q = 3$.

Nous allons maintenant démontrer le théorème dans le cas général ; n et q désignent donc des entiers naturels non nuls, q étant **impair**. Il s'agit de démontrer que :

$$S_n(1) \mid S_n(q) \quad i.e. \quad S_n(q) \equiv 0 [S_n(1)]$$

3. (a) Énoncer le lemme de Gauss.
- (b) Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge b = 1$. Montrer que, si $a \mid c$ et $b \mid c$, alors $ab \mid c$.
4. (a) Après avoir justifié l'égalité :

$$S_n(q) = \sum_{k=0}^n (n-k)^q,$$

montrer que $S_n(q) \equiv -S_n(q) [n]$.

- (b) Établir que $n + 1$ divise $2S_n(q)$.
- (c) Achever la démonstration du théorème de Faulhaber.

II – Caractérisation des nombres parfaits pairs

On appelle *nombre parfait* tout entier n dont la somme des diviseurs positifs vaut $2n$ ou, de manière équivalente, tout entier n dont la somme des diviseurs positifs *stricts* (*i.e.* n non compris) vaut n . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n .

5. Si n est un entier naturel non nul, on notera $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n , de sorte que :

$$\sigma(n) = \sum_{d \in \mathcal{D}(n)} d$$

- (a) Soient m et n des entiers naturels premiers entre eux.
 - i. Soit $k \in \mathcal{D}(mn)$. On pose $d = k \wedge m$ et $\delta = k \wedge n$. Montrer l'égalité $k = d\delta$.
 - ii. Montrer que l'application :

$$\Theta : \begin{cases} \mathcal{D}(m) \times \mathcal{D}(n) & \longrightarrow \mathcal{D}(mn) \\ (d, \delta) & \longmapsto d\delta \end{cases}$$

est bijective.

- (b) En déduire que la fonction σ est *multiplicative*, *i.e.* que :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*, \quad m \wedge n = 1 \implies \sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$$

6. Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que $2^p - 1$ est un nombre premier.
 - (a) Montrer que p est un nombre premier.
 - (b) Montrer que l'entier $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait.
7. Montrer que tout nombre parfait pair est de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ où p est un nombre premier.

– FIN DE L'ÉPREUVE –