

DEVOIR SURVEILLÉ 5

durée de l'épreuve : 4h

- La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir.
- Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1 (arithmétique).

1. *Questions de cours.*

- Énoncer le théorème de Bézout et le lemme de Gauss.
- Démontrer le lemme de Gauss en admettant le théorème de Bézout.

2. *Une équation diophantienne.*

On considère l'équation (D) ci-dessous, d'inconnue $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$:

$$11m - 24n = 1 \tag{D}$$

- Justifier, sans aucun calcul, que l'équation (D) admet au moins une solution.
- Déterminer une solution particulière $(m_0, n_0) \in \mathbb{Z}^2$ de (D) .
- Déterminer l'ensemble des solutions noté $\mathcal{S}$ de l'équation (D) .

3. *Une application.*

Dans cette question, on veut calculer le PGCD des nombres $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

- Justifier que pour tout entier naturel k , le nombre $10^k - 1$ est un multiple de 9.
- Montrer que, pour toute solution (m, n) de (D) , on a :

$$(10^{11m} - 1) - 10(10^{24n} - 1) = 9$$

(c) En déduire que :

$$\exists (M, N) \in \mathbb{Z}^2, \quad (10^{11} - 1)M - (10^{24} - 1)N = 9$$

(d) Conclure quant à la valeur de $(10^{11} - 1) \wedge (10^{24} - 1)$.

Exercice 2 (étude d'une suite implicite).

Soient n un entier naturel et a un nombre réel strictement positif. On se propose d'étudier les solutions réelles de l'équation :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+n} = a \quad (E_n)$$

i.e. de :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{x+k} = a \quad (E_n)$$

À cet effet, on introduit la fonction suivante :

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{1}{x+k} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+n}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f_n , noté $\mathcal{D}$.
2. Résoudre les équations (E_0) et (E_1) .

Désormais, n désigne un entier naturel quelconque.

3. Dénombrement des solutions de l'équation (E_n)

- (a) Étudier les variations de f_n sur chaque intervalle du domaine $\mathcal{D}$.
- (b) Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$.
Dans toute la suite du problème, on note x_n cette unique solution.
- (c) Combien l'équation (E_n) admet-elle de solutions dans $\mathbb{R}$? Justifier.

4. Étude rapide de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier le signe de la fonction $f_{n+1} - f_n$ sur $]0, +\infty[$.
- (b) En déduire le sens de variation de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5. Équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$

- (a) Énoncer le théorème des accroissements finis.
- (b) Montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{x} \leq \ln(x) - \ln(x-1) \leq \frac{1}{x-1}$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que pour tout nombre réel strictement positif x , on a :

$$f_n(x) - \frac{1}{x} \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) \leq f_n(x) - \frac{1}{x+n}$$

puis :

$$a - \frac{1}{x_n} \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x_n}\right) \leq a - \frac{1}{x_n + n}$$

- (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x_n \geq \frac{n}{e^a - 1}$.
- (e) En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{n}{x_n}\right) = a$.
- (f) En exploitant cette dernière limite, montrer finalement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(e^a - 1)x_n}{n} = 1$$

Exercice 3 (étude d'une suite récurrente).

Dans cet exercice, on pourra utiliser librement le fait que le nombre $e = \exp(1)$ est tel que $2 < e < 3$.

1. Question préliminaire.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue sur $[a, b]$ et à valeurs dans $[a, b]$. Montrer que la fonction f admet *au moins un* point fixe dans $[a, b]$, i.e. que :

$$\exists c \in [a, b], \quad f(c) = c$$

On considère la fonction φ d'expression :

$$\varphi(x) = \sqrt{2 - \ln(x)}$$

2. Déterminer le domaine de définition, noté $\mathcal{D}_\varphi$, de la fonction φ .
3. Déterminer le domaine de dérivabilité, noté D_φ , de φ , et calculer φ' .
4. (a) Montrer que l'intervalle $[1, e]$ est stable par la fonction φ .
(b) En utilisant la question préliminaire, justifier que φ admet un *unique* point fixe dans $[1, e]$.
Dans la suite, ce point fixe sera noté ℓ .

On considère la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$$

5. Donner l'argument qui permet de justifier le fait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1, e]$$

6. (a) Montrer que la fonction φ est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur l'intervalle $[1, e]$.
(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} \times |u_n - \ell|$$

- (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq \frac{e - 1}{2^n}$$

- (d) Conclure que la suite u converge et déterminer sa limite.

Exercice 4 (série de Riemann).

Soit $\alpha \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

On veut déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.

1. On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^{1-\alpha} \end{cases}$. Étudier les variations de f sur son domaine de définition.

2. Justifier que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists c \in]k, k+1[, \quad \frac{1}{c^\alpha} = \frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

3. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

4. Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq \frac{(N+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$$

5. Conclure quant à la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.

6. Traiter le cas $\alpha = 1$.

7. Traiter le cas $\alpha > 1$. *Dans cas, on montrera que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.*

– FIN DE L'ÉPREUVE –