Devoir Surveillé 5

durée de l'épreuve : 4h

- *La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir.*
- *Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.*
- *La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants.

Exercice (arithmétique).

1. *Questions de cours.*
   (a) Énoncer le théorème de Bézout et le lemme de Gauss.
   (b) Démontrer le lemme de Gauss en admettant le théorème de Bézout.
2. *Une équation diophantienne.*
   On considère l'équation (D) ci-dessous, d'inconnue $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$:
   $$11m - 24n = 1 \qquad (D)$$
   (a) Justifier, sans aucun calcul, que l'équation (D) admet au moins une solution.
   (b) Déterminer une solution particulière $(m_0, n_0) \in \mathbb{Z}^2$ de (D).
   (c) Déterminer l'ensemble des solutions noté $\mathscr{S}$ de l'équation (D).
3. *Une application.*
   Dans cette question, on veut calculer le PGCD des nombres $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel k, le nombre $10^k - 1$ est un multiple de 9.
   (b) Montrer que, pour toute solution (m, n) de (D), on a :
   $$(10^{11m} - 1) - 10(10^{24n} - 1) = 9$$
   (c) En déduire que :
   $$\exists\,(M, N) \in \mathbb{Z}^2, \qquad (10^{11} - 1)M - (10^{24} - 1)N = 9$$
   (d) Conclure quant à la valeur de $(10^{11} - 1) \wedge (10^{24} - 1)$.

Problème 1 (étude d'une suite récurrente).

Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} x_0 \in]1, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + 1 + \dfrac{1}{x_n - 1} \end{cases}$$

On note f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

Partie A : informatique et conjectures

1. *Question informatique*
   (a) Écrire une fonction Python nommée `suite(n,x0)` qui prend en entrée un entier naturel n et un nombre `x0` représentant le premier terme de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et qui renvoie la liste `[x0,x1,...,xn]` des $n+1$ premiers termes de la suite.
   (b) Écrire une fonction `depasse(x0,M)` qui prend en entrée le premier terme `x0` de la suite, un nombre réel `M` strictement positif, et qui renvoie la première valeur de n pour laquelle $x_n \geqslant$ `M`.
2. Étudier la fonction f sur $]1,+\infty[$ et justifier que l'intervalle $]1,+\infty[$ est stable par f. Que peut-on en déduire ?
3. Sur un même graphique, représenter la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f, la droite Δ d'équation $y = x$ et les premiers termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (*on choisira la valeur initiale* $x_0 = 3$). Quelle(s) conjecture(s) peut-on émettre sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   Pour la représentation graphique, on commencera par étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ *et* Δ *sur* $]1,+\infty[$.

Partie B : limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Justifier que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$ et la déterminer.
6. *Nous cherchons dans cette question à préciser le comportement asymptotique de la suite.*
   (a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, on a l'inégalité $x_n \geqslant n+1$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$0 \leqslant x_{k+1} - x_k - 1 \leqslant \frac{1}{k}$$
   (c) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad 0 \leqslant x_n - x_1 - (n-1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$
   (d) i. Établir que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.
   ii. En déduire que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a :
   $$\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$$
   (e) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
   $$n+1 \leqslant x_n \leqslant x_1 + n + \ln(n-1)$$
   On utilisera la question 6.(c).
   (f) Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ quand n tend vers $+\infty$.

Problème 2 (étude d'une suite implicite).

Dans ce problème, on pourra utiliser le résultat d'intégration suivant, vu en classe de Terminale (et qui sera démontré ultérieurement en MPSI).

Théorème (croissance de l'intégrale) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et $f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que :

$$\forall x \in [a, b], \qquad f(x) \leqslant g(x)$$

Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynôme $P_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

Partie A : étude des fonctions P_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a les égalités suivantes :

$$P_n'(x) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1},$$

   où P_n' désigne la dérivée de P_n.

   (b) En déduire le sens de variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n. *La limite de P_n en $+\infty$ sera déterminée à la question* 2.(c).

2. (a) Justifier que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\,\mathrm{d}t$$

   (b) Démontrer que :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \qquad t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1)$$

   Indication : on pourra faire une étude de fonction.

   (c) En déduire que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad P_n(x) - P_n(1) \geqslant \frac{n}{2}(x - 1)^2$$

   Remarque : d'après la relation de Chasles pour les intégrales et la question 2.(a), on a :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad P_n(x) - P_n(1) = \int_1^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\,\mathrm{d}t$$

   (d) Donner la limite de P_n quand x tend vers $+\infty$.

3. Calculer $P_n(0)$ et justifier que $P_n(1) < 0$.
4. Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1, +\infty[$ (que l'on notera dans la suite x_n).

Ainsi, pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, on a $P_m(x_m) = 0$.

Partie B : étude de la suite implicite $(x_n)_{n\geqslant 1}$

Dans cette partie, on admettra le fait suivant (que l'on pourra donc utiliser sans démonstration) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_n \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}$$

5. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, +\infty[, \qquad P_{n+1}(x) - P_n(x) = x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right)$$

6. (a) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left[\frac{2n+2}{2n+1}, +\infty\right[, \qquad P_{n+1}(x) \geqslant P_n(x)$$

   (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P_{n+1}(x_n) \geqslant 0$$

   (c) Montrer alors que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Conclure qu'elle converge.

7. (a) En utilisant la question 2.(a) et la propriété de croissance de l'intégrale, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad -\ln(2) \leqslant P_n(1) \leqslant 0$$

   (b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question 2.(c), montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}}$$

   Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$?

– FIN DE L'ÉPREUVE –