Devoir Surveillé 5

un corrigé

Exercice 1 (étude d'une suite implicite).

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{x+k} = a \iff \frac{1}{x} = a \iff x = \frac{1}{a} \qquad (\text{car } a \neq 0)$$
et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$:
$$\sum_{k=0}^{1} \frac{1}{x+k} = a \iff \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = a \iff \frac{2x+1}{x(x+1)} = a \iff 2x+1 = ax(x+1)$$
$$\iff ax^2 + (a-2)x - 1 = 0 \qquad (1)$$
L'équation (1) est du second degré (car $a \neq 0$) ; elle admet pour discriminant $(a-2)^2+4a > 0$ (puisque $(a-2)^2 \geqslant 0$ et $a > 0$). Celle-ci admet donc pour racines (réelles distinctes) $\dfrac{2-a \pm \sqrt{(a-2)^2+4a}}{2a}$. Donc :
$$\boxed{(\mathrm{E}_0) \text{ a pour racine } \frac{1}{a} \text{ et } (\mathrm{E}_1) \text{ a deux racines réelles distinctes qui sont } \frac{2-a \pm \sqrt{a^2+4}}{2a}}$$

2. **Dénombrement des racines de l'équation (E_n)**
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathscr{D}$ comme somme de fonctions qui le sont et :
$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad f_n'(x) = -\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{(x+k)^2}}_{>0} < 0$$
   Ainsi :
$$\boxed{\text{la fonction } f_n \text{ est strictement décroissante sur chaque intervalle constitutif de } \mathscr{D}}$$
   La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$ (car elle y est dérivable) et elle est y strictement décroissante. D'après le théorème de la bijection, la fonction f_n réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur l'intervalle :
$$f_n(]0, +\infty[) = \Big]\lim_{x\to+\infty} f_n(x), \lim_{x\to 0^+} f_n(x)\Big[$$
   Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+k} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ (somme de limites). De plus :
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+k} = \frac{1}{k} \in \mathbb{R} \qquad \text{tandis que} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$
   Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = +\infty$ et donc $f_n(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$. Comme $a \in]0, +\infty[$ (par hypothèse), on peut conclure que :
$$\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = a \text{ (c'est-à-dire } (\mathrm{E}_n)\text{) admet une unique solution dans l'intervalle }]0, +\infty[}$$
   (b) On étudie l'existence de solutions de l'équation (E_n) sur chacun des intervalles constitutifs de $\mathscr{D}$. La fonction f_n est continue et strictement décroissante sur chacun des intervalles constitutifs de $\mathscr{D}$ donc le théorème de la bijection s'applique sur chacun d'eux.
   ⋆ **Étude sur l'intervalle $]-\infty, -n[$**
   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = 0$ (même calcul qu'à la question précédente) et $\lim\limits_{x\to-n^-} f_n(x) = -\infty$ car :
$$\lim_{x\to-n^-} \frac{1}{x+n} = -\infty \qquad \text{tandis que} \qquad \lim_{x\to-n^-} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{-n+k} \in \mathbb{R}$$
   Ainsi, $f_n(]-\infty, -n[) =]-\infty, 0[$ donc $a \notin f_n(]-\infty, -n[)$ (car $a > 0$). L'équation (E_n) n'admet donc pas de solution dans l'intervalle $]-\infty, -n[$.

⋆ **Étude sur l'intervalle $]-\ell,-\ell+1[$ où $\ell \in [\![1,n]\!]$**

On a $\lim\limits_{x\to -\ell^+} f_n(x) = +\infty$ car :

$$\lim_{x\to -\ell^+} \frac{1}{x+\ell} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to -\ell^+} \sum_{\substack{k=0\\k\neq \ell}}^{n} \frac{1}{x+k} = \sum_{\substack{k=0\\k\neq \ell}}^{n} \frac{1}{-\ell+k} \in \mathbb{R}$$

et $\lim\limits_{x\to (-\ell+1)^-} f_n(x) = -\infty$ car :

$$\lim_{x\to (-\ell+1)^-} \frac{1}{x+\ell-1} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to (-\ell+1)^-} \sum_{\substack{k=0\\k\neq \ell-1}}^{n} \frac{1}{x+k} = \sum_{\substack{k=0\\k\neq \ell-1}}^{n} \frac{1}{-\ell+1+k} \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $f_n(]-\ell,-\ell+1[) = \mathbb{R}$ donc $a \in f_n(]-\ell,-\ell+1[)$. L'équation (E_n) admet donc une unique solution dans l'intervalle $]-\ell,-\ell+1[$.

Il y a n intervalles dans la réunion $\bigcup\limits_{\ell=1}^{n}]-\ell,-\ell+1[$ donc l'équation (E_n) admet n racines dans cette réunion.

Enfin, on a vu à la question 2.(b) que (E_n) admettait également une (unique) solution dans l'intervalle $]0,+\infty[$. Finalement :

$$\boxed{\text{l'équation } (\mathrm{E}_n) \text{ admet exactement } n+1 \text{ racines réelles}}$$

3. **Étude rapide de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de Chasles, on a pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{x+k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} = \frac{1}{x+n+1} > 0 \qquad (\text{car } x>0 \text{ et } n+1>0)$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } f_{n+1}-f_n \text{ est à valeurs (strictement) positives sur }]0,+\infty[}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $x_n \in]0,+\infty[$, on peut utiliser la question précédente :

$$f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n) \geqslant 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad f_{n+1}(x_n) \geqslant a \qquad (\text{car } f_n(x_n) = a)$$

Or on a aussi $f_{n+1}(x_{n+1}) = a$ donc l'inégalité précédente se réécrit $f_{n+1}(x_n) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1})$. La fonction f_{n+1} est *strictement* décroissante sur $]0,+\infty[$ et $(x_n, x_{n+1}) \in]0,+\infty[^2$ donc $x_n \leqslant x_{n+1}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$$

4. **Équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$**

(a) On utilise l'inégalité de concavité de la fonction ln, à savoir :

$$\forall t \in]-1,+\infty[, \qquad \ln(1+t) \leqslant t$$

Soit $x \in]1,+\infty[$. On a :

$$\ln(x-1) - \ln(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leqslant -\frac{1}{x},$$

ce qui fournit l'inégalité de gauche en multipliant par $-1<0$. De plus :

$$\ln(x) - \ln(x-1) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \leqslant \frac{1}{x-1}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in]1,+\infty[, \qquad \frac{1}{x} \leqslant \ln(x) - \ln(x-1) \leqslant \frac{1}{x-1}}$$

(b) Soit $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times]0,+\infty[$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \qquad \frac{1}{x+k} \leqslant \ln(x+k) - \ln(x+k-1) \leqslant \frac{1}{x+k-1} \qquad (\text{car } x+k>1 \text{ car } x>0 \text{ et } k \geqslant 1)$$

En sommant ces inégalités, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\ln(x+k) - \ln(x+k-1)) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k-1}$$

D'après la relations de Chasles, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} = f_n(x) - \frac{1}{x}$. La somme *du milieu* est télescopique et vaut :

$$\sum_{k=1}^{n} (\ln(x+k) - \ln(x+k-1)) = \ln(x+n) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+n}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)$$

Enfin, le changement d'indice $\ell = k-1$ et la relation de Chasles dans la troisième somme fournissent :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{x+\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{x+\ell} - \frac{1}{x+n} = f_n(x) - \frac{1}{x+n}$$

Finalement :

$$\boxed{f_n(x) - \frac{1}{x} \leqslant \ln\left(1+\frac{n}{x}\right) \leqslant f_n(x) - \frac{1}{x+n}}$$

puis, en évaluant en $x_n \in]0,+\infty[$, on obtient bien (puisque $f_n(x_n) = a$ par définition de x_n) :

$$\boxed{a - \frac{1}{x_n} \leqslant \ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right) \leqslant a - \frac{1}{x_n+n}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité de droite précédemment établie, on a :

$$a \geqslant \ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right) + \underbrace{\frac{1}{x_n+n}}_{\geqslant 0} \geqslant \ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right)$$

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\exp \circ \ln = \mathrm{Id}_{]0,+\infty[}$ donc :

$$\mathrm{e}^{\,a} \geqslant 1 + \frac{n}{x_n} \qquad \text{puis} \qquad \frac{\mathrm{e}^{\,a}-1}{n} \geqslant \frac{1}{x_n} \qquad (\text{car } n > 0)$$

En utilisant enfin la décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$, on obtient bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_n \geqslant \frac{n}{\mathrm{e}^{\,a}-1}}$$

(d) Comme $a > 0$, on a $\mathrm{e}^{\,a} > \mathrm{e}^{\,0}$ (par croissance stricte de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$), c'est-à-dire $\mathrm{e}^{\,a} - 1 > 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\mathrm{e}^{\,a}-1} = +\infty$. Le théorème de comparaison permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$$

Ceci implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(a - \dfrac{1}{x_n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(a - \dfrac{1}{x_n+n}\right) = a$. La deuxième série d'inégalités obtenues à la question 5.(c) et le théorème des gendarmes nous donnent donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right) = a}$$

(e) La limite précédente implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{n}{x_n}\right) = \mathrm{e}^{\,a}$ (par composition des limites avec la fonction exponentielle continue en a). Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{x_n} = \mathrm{e}^{\,a} - 1 \neq 0$. Ceci se réécrit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{\,a}-1)x_n}{n} = 1}$$

Exercice 2 (méthode de Newton).

Partie 1 : Description de la méthode de Newton

1. On sait que la fonction f est continue sur $[a,b]$ (puisqu'elle y est de classe $\mathscr{C}^2$). De plus, f est strictement décroissante sur $[a,b]$ (hypothèse (H_1)). D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[a,b]$ sur l'intervalle :

$$f([a,b]) = [f(b), f(a)]$$

D'après l'hypothèse (H_3), on a $0 \in f([a,b])$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{il existe un unique nombre réel } c \in [a,b] \text{ tel que } f(c) = 0}$$

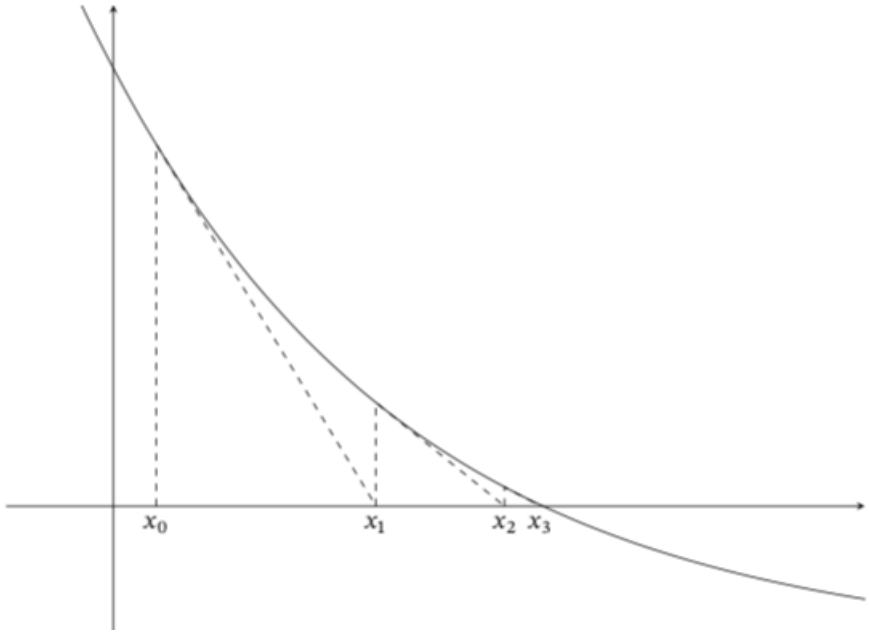
2. (a) Comme f est dérivable au point c (puisqu'elle est dérivable sur $[a,b]$), la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse $u \in [a,b]$. Une équation de celle-ci est $y = f'(u)(x-u) + f(u)$. On cherche le point $x \in [a,b]$ correspondant au point d'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses. On résout :

$$\begin{aligned} f'(u)(x-u) + f(u) = 0 &\iff f'(u)(x-u) = -f(u) \\ &\iff x - u = -\frac{f(u)}{f'(u)} \qquad (\text{licite car } f'(u) \neq 0 \text{ d'après } (H_1)) \\ &\iff x = u - \frac{f(u)}{f'(u)} \end{aligned}$$

Ainsi :

l'abscisse du point d'intersection cherché est $u - \dfrac{f(u)}{f'(u)}$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_n avec l'axe des abscisses.



3. (a) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ donc f et f' sont en particulier dérivables sur $[a,b]$ et f' ne s'annule pas sur $[a,b]$ (hypothèse (H_3)). La fonction g est donc bien définie et dérivable sur $[a,b]$ comme différence et quotient de fonctions qui le sont. De plus :

$$\forall x \in [a,b], \qquad g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

On sait que f est (strictement) décroissante sur $[a,b]$ et s'annule en c. Le signe de f sur $[a,b]$ est donc donné par le tableau suivant :

x	a		c		b
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Par ailleurs, la fonction f'^2 est clairement positive sur $[a,b]$ et, d'après (H_2), la fonction f'' est positive sur $[a,b]$. Le signe de g' sur $[a,b]$ est donc celui de f. On en déduit le tableau de variations de g sur $[a,b]$ suivant :

x	a		c		b
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$g(a)$	↗	$g(c)$	↘	$g(b)$

(b) On a $g(c) = c$ (car $f(c) = 0$ par définition de c) et :

$$g(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)} > a$$

car $f(a) > 0$ et $f'(a) < 0$ (d'après (H_1) et (H_3)). Pour tout $x \in [a,c]$, on a par croissance de g sur $[a,c]$:

$$a < g(a) \leqslant g(x) \leqslant g(c) = c \qquad \text{donc} \qquad g(x) \in [a,c]$$

Ainsi :

$$g([a,c]) \subset [a,c]$$

L'intervalle $[a,c]$ est donc stable par la fonction g. Comme $x_0 \in [a,c]$, une récurrence immédiate permet de conclure que :

la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $[a,c]$

Partie 2 : Convergence de la méthode de Newton

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_{n+1} - x_n = g(x_n) - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \geqslant 0$$

car la fonction f' est à valeurs négatives sur $[a,c]$ et car $x_n \in [a,c]$ et on sait que f' est positive sur $[a,c]$. Ainsi :

la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

(b) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et elle est majorée par c (d'après la question 3.(d)) donc elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone. Notons $\ell \in [a,c]$ la limite de cette suite. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = g(x_n)$$

Or $x_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $g(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(\ell)$ d'après la caractérisation séquentielle de la continuité (en effet, g est continue sur $[a,b]$ donc en particulier au point c). En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence précédente, on a donc l'égalité $\ell = g(\ell)$, c'est-à-dire :

$$-\frac{f(\ell)}{f'(\ell)} = 0 \qquad \text{soit encore} \qquad f(\ell) = 0$$

Or f est injective sur $[a,b]$ et on a l'égalité $f(\ell) = f(c) = 0$ (avec $\ell, c \in [a,b]$) donc $\ell = c$. Ainsi :

la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c

5. (a) On sait que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$. En particulier, les fonctions f' et f'' sont continues sur $[a,b]$. La fonction valeur absolue étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit par composition que les fonctions $|f'|$ et $|f''|$ sont continues sur le segment $[a,b]$. La première fonction admet donc un minimum et la seconde un maximum (d'après le théorème des bornes atteintes). Il existe donc $\alpha, \beta \in [a,b]$ tels que :

$$(\forall x \in [a,b],\ |f'(x)| \geqslant |f'(\alpha)|) \qquad \text{et} \qquad (\forall x \in [a,b],\ |f''(x)| \leqslant |f''(\beta)|)$$

Posons $m = |f'(\alpha)|$ et $M = |f''(\beta)| + 1$. Alors $|f''|$ est majorée par M sur $[a,b]$ et $M > 0$. De plus, $m > 0$ car on sait que f' est à valeurs strictement négatives (donc ne s'annule pas) sur $[a,b]$. Donc :

il existe $m, M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, on ait $|f'(x)| \geqslant m$ et $|f''(x)| \leqslant M$

(b) Soit $x \in [a,c]$. On a :

$$f(x) = f(c) + \int_x^c f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Posons ensuite :

$$\begin{array}{ll} u'(t) = 1 & v(t) = f'(t) \\ u(t) = t - c & v'(t) = f''(t) \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ (car $f \in \mathscr{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ pour la fonction v). On peut donc intégrer par parties et on a :

$$\int_x^c f'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[(t-c)f'(t)\Big]_x^c - \int_x^c (t-c)f''(t)\,\mathrm{d}t = (c-x)f'(x) + \int_x^c (c-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

En injectant l'expression de l'intégrale dans l'égalité proposée au début de la question, on a bien :

$$\boxed{f(c) = f(x) + (c-x)f'(x) + \int_x^c (c-t)f''(t)\,\mathrm{d}t}$$

On a alors (en utilisant l'inégalité triangulaire) :

$$\begin{aligned} |f(c) - f(x) - (c-x)f'(x)| = \left|\int_x^c (c-t)f''(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_x^c \underbrace{|c-t|}_{\geqslant 0}\,\underbrace{|f''(t)|}_{\leqslant M}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant M\int_x^c (c-t)\,\mathrm{d}t \\ &= M\left[-\frac{(c-t)^2}{2}\right]_x^c \\ &= M\frac{(c-x)^2}{2} \end{aligned}$$

On sait que $f(c)=0$ donc cette inégalité se réécrit :

$$|(x-c)f'(x)-f(x)| \leqslant M\frac{(c-x)^2}{2}$$

En divisant par $|f'(x)| = -f'(x)$ (car $f'(x)<0$), il vient :

$$\left|-(x-c)+\frac{f(x)}{f'(x)}\right| \leqslant \frac{M(c-x)^2}{2|f'(x)|} \qquad \text{ou} \qquad \left|x-\frac{f(x)}{f'(x)}-c\right| \leqslant \frac{M(c-x)^2}{2|f'(x)|} \leqslant \frac{M(c-x)^2}{2m}$$

car on sait que $|f'|$ est minorée par m sur $[a,b]$. Donc :

$$\boxed{|g(x)-c| \leqslant (x-c)^2\frac{M}{2m}}$$

(c) On sait que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$ donc :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_\varepsilon \implies |x_n-c| \leqslant \varepsilon$$

En particulier, pour $\varepsilon = \frac{1}{2K} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \geqslant N$, on ait $|x_n - c| \leqslant \frac{1}{2K}$, ce qui implique que $K|x_n-c| \leqslant \frac{1}{2} < 1$. En particulier :

$$\boxed{K|x_N-c|<1}$$

(d) On procède par récurrence.

★ L'inégalité est vérifiée pour $n=N$ puisqu'il s'agit d'une égalité (les deux membres valent $|x_N-c|$).

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$. On suppose que :

$$|x_n-c| \leqslant K^{2^{n-N}-1}|x_N-c|^{2^{n-N}}$$

Montrons que :

$$|x_{n+1}-c| \leqslant K^{2^{n+1-N}-1}|x_N-c|^{2^{n+1-N}}$$

On sait que $x_n \in [a,c]$ et que $x_{n+1}=g(x_n)$ donc, d'après la question 5.(b) :

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-c| = |g(x_n)-c| &\leqslant K(x_n-c)^2\\ &= K|x_n-c|^2\\ &\leqslant K \times \left(K^{2^{n-N}-1}\right)^2\left(|x_N-c|^{2^{n-N}}\right)^2\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence et par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$. Or :

$$\begin{aligned}K \times \left(K^{2^{n-N}-1}\right)^2\left(|x_N-c|^{2^{n-N}}\right)^2 &= K \times K^{2\times 2^{n-N}-2}|x_N-c|^{2^{n-N}\times 2}\\ &= K^{2^{n+1-N}-1}|x_N-c|^{2^{n+1-N}}\end{aligned}$$

L'inégalité est donc vérifiée au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on a donc :

$$\boxed{\forall n \geqslant N, \qquad |x_n-c| \leqslant K^{2^{n-N}-1}|x_N-c|^{2^{n-N}}}$$

(e) Pour tout entier n supérieur ou égal à N, on a :

$$|x_n-c| \leqslant \frac{1}{K} \times \left[\left(K|x_N-c|\right)^{2^{-N}}\right]^{2^n}$$

On pose donc $C=\frac{1}{K}>0$ et $k=\left(K|x_N-c|\right)^{2^{-N}}$. On sait que $K|x_N-c| \in [0,1[$ d'après la question 5.(c) donc $k \in [0,1[$. Ainsi :

$$\boxed{\exists (C,k) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |x_n-c| \leqslant Ck^{2^n}}$$

Exercice 3 (arithmétique).

I – Un théorème de Faulhaber

1. On a la relation $1\times(n+1)+(-1)\times n = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout :

$$\boxed{\text{les entiers } n \text{ et } n+1 \text{ sont premiers entre eux}}$$

2. (a) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $P : x \longmapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a (après calculs) :

$$P(x+1) = P(x) + 4ax^3 + (6a+3b)x^2 + (4a+3b+2c)x + a + b + c + d$$

Ainsi, pour que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x+1) - P(x),$$

il suffit que $\begin{cases} 4a = 1 \\ 6a + 3b = 0 \\ 4a + 3b + 2c = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases}$. La résolution de ce système fournit les valeurs :

$$a = \frac{1}{4}, \qquad b = -\frac{1}{2} \qquad c = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad d = 0$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{le polynôme } P = \frac{X^4}{4} - \frac{X^2}{2} + \frac{X}{4} \text{ est solution du problème}}$$

(b) En sommant les égalités obtenues à la question précédente, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(3) = P(n+1) - P(1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord, les nombres $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ sont clairement des entiers (une somme d'entiers étant un entier). De plus, d'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \qquad \text{donc} \qquad \sum_{k=1}^{n} k \quad \text{divise} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{le théorème de Faulhaber est vrai si } q = 3}$$

3. (a) Le lemme de Gauss s'énonce comme suit :

$$\boxed{\text{Soient } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ tels que } a \mid bc \text{ et } a \wedge b = 1. \text{ Alors } a \mid c.}$$

(b) Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge b = 1$. On suppose que $a \mid c$ et $b \mid c$. Comme $a \mid c$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $c = ka$. Ensuite $b \mid ka$ et $a \wedge b = 1$ donc $b \mid k$ d'après le lemme de Gauss. On en déduit que $ab \mid ka$, *i.e.* que $ab \mid c$. Ainsi :

$$\boxed{\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \qquad (a \wedge b = 1 \text{ et } a \mid c \text{ et } b \mid c) \implies ab \mid c}$$

4. (a) Le changement d'indice (décroissant) $p = n - k$ dans la somme $S_n(q)$ fournit :

$$S_n(q) = \sum_{p=0}^{n-1} (n-p)^q = \sum_{p=0}^{n} (n-p)^q$$

car $0^q = 0$ (puisque $q \geqslant 1$). Autrement dit :

$$\boxed{S_n(q) = \sum_{k=0}^{n} (n-k)^q}$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $n - k \equiv -k\,[n]$ puis, par compatibilité de la relation de congruence avec l'exponentiation positive entière

$$(n-k)^q \equiv (-k)^q \equiv -k^q\,[n] \qquad \text{car} \qquad (-k)^q = (-1)^q k^q = -k^q$$

car l'entier q est impair. En sommant les relations de congruences, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k)^q \equiv -\sum_{k=1}^{n} k^q\,[n]$$

La question précédente permet de conclure que :

$$\boxed{S_n(q) \equiv -S_n(q)\,[n]}$$

(b) Le changement d'indice $p = n + 1 - k$ définissant $S_n(q)$ fournit l'égalité $S_n(q) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} (n+1-p)^q$. Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on a $(n+1-p)^q \equiv -p^q\,[n+1]$ puis, en sommant les relations de congruences, on obtient la relation :

$$S_n(q) \equiv -S_n(q)\,[n+1] \qquad \text{soit encore} \qquad 2S_n(q) \equiv 0\,[n+1]$$

Autrement dit :

$\boxed{n+1 \text{ divise } 2S_n(q)}$

(c) On sait que n et $n+1$ divisent $2S_n(q)$ (questions 4.(a) et 4.(b)). Or n et $n+1$ sont premiers entre eux (d'après la question 1.) donc $n(n+1)$ divise $2S_n(q)$ (d'après la question 3.(b)). Autrement dit, il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $2S_n(q) = \alpha n(n+1)$, ce qui se réécrit :

$$S_n(q) = \alpha \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{soit encore} \qquad S_n(q) = \alpha S_n(1)$$

Autrement dit, $S_n(1) \mid S_n(q)$. Finalement :

$\boxed{\text{le théorème de Faulhaber est démontré}}$

II – Caractérisation des nombres parfaits pairs

5. (a) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \wedge n = 1$.

i. Soit $k \in \mathscr{D}(mn)$. On pose $d = k \wedge m$ et $\delta = k \wedge n$. On a $d \mid m$ et $\delta \mid n$ (par définition du PGCD) ; or m et n sont premiers entre eux donc d et δ sont premiers entre eux. Comme d et δ divisent k, on en déduit que $d\delta \mid k$. Pour conclure que $k = d\delta$, il suffit de montrer que k divise $d\delta$. D'après le théorème sur la relation de Bézout, il existe $u, v, w, x \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$d = ku + mv \qquad \text{et} \qquad \delta = kw + nx$$

En multipliant membre à membre, on obtient :

$$d\delta = (ku + mv)(kw + nx) = k(kuw + nux + mvw) + mnvx$$

On sait que k divise mn donc $k \mid k(kuw + nux + mvw) + mnvx$ *i.e.* $k \mid d\delta$. Finalement :

$\boxed{\text{on a bien l'égalité } k = d\delta}$

ii. Tout d'abord, l'application Θ est bien définie car si d et δ sont des diviseurs de m et n respectivement, alors $d\delta$ divise mn. On démontre maintenant l'injectivité et la surjectivité de Θ.

⋆ Soit $k \in \mathscr{D}(mn)$. En posant $d = k \wedge m$ et $\delta = k \wedge n$, on a $(d, \delta) \in \mathscr{D}(m) \times \mathscr{D}(n)$ et l'égalité :

$$k = d\delta = \Theta\big((d, \delta)\big)$$

d'après la question précédente. L'application Θ est donc surjective.

⋆ Soient $(d_1, \delta_1), (d_2, \delta_2) \in \mathscr{D}(m) \times \mathscr{D}(n)$. On suppose que $\Theta\big((d_1, \delta_1)\big) = \Theta\big((d_2, \delta_2)\big)$. Ainsi, $d_1\delta_1 = d_2\delta_2$. L'entier d_1 divise donc $d_2\delta_2$. Or d_1 et δ_2 sont premiers entre eux (en effet, si a est un diviseur commun à d_1 et δ_2, alors a divise m et a divise n donc $a \mid m \wedge n$ *i.e.* $a \mid 1$). D'après le lemme de Gauss, $d_1 \mid d_2$. Par symétrie, on a aussi $d_2 \mid d_1$ donc $d_2 = d_1$ (par antisymétrie de $\mid$ sur $\mathbb{N}^*$). Il s'ensuit que $\delta_1 = \delta_2$ et donc l'application Θ est injective.

Finalement :

$\boxed{\text{l'application } \Theta \text{ est bijective}}$

(b) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \wedge n = 1$. L'application Θ étant bijective, on a :

$$\mathscr{D}(mn) = \big\{ d\delta \,\big|\, d \in \mathscr{D}(m) \text{ et } \delta \in \mathscr{D}(n) \big\}$$

On en déduit que :

$$\sigma(mn) = \sum_{k \in \mathscr{D}(mn)} k = \sum_{\substack{d \in \mathscr{D}(m) \\ \delta \in \mathscr{D}(n)}} d\delta = \sum_{d \in \mathscr{D}(m)} \sum_{\delta \in \mathscr{D}(n)} d = \left(\sum_{d \in \mathscr{D}(m)} d \right) \left(\sum_{\delta \in \mathscr{D}(n)} \delta \right)$$
$$= \sigma(m)\sigma(n)$$

Ainsi :

$\boxed{\text{l'application } \sigma \text{ est multiplicative}}$

6. Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que $2^p - 1$ est un nombre premier.

(a) Soit $d \in \mathscr{D}(p)$. On a $2^d \equiv 1\,[2^d - 1]$ et comme $\dfrac{p}{d}$ est un entier, on en déduit que :

$$2^p = \big(2^d\big)^{p/d} \equiv 1\,[2^d - 1]$$

Autrement dit, $2^d - 1$ divise $2^p - 1$. Or $2^p - 1$ est un nombre premier donc $2^d - 1 \in \{1, 2^p - 1\}$. Autrement dit, $d = 1$ ou $d = p$. Ainsi, les seuls diviseurs de p sont 1 et p. On peut donc conclure que :

$\boxed{\text{l'entier } p \text{ est un nombre premier}}$

(b) Les entiers 2^{p-1} et $2^p - 1$ sont premiers entre eux (le seul facteur premier de 2^{p-1} est 2 et 2 ne divise pas $2^p - 1$, ce dernier entier étant impair). La fonction σ étant multiplicative, on obtient :

$$\sigma(n) = \sigma(2^{p-1})\sigma(2^p - 1)$$

Or $2^p - 1$ est un nombre premier donc $\sigma(2^p - 1) = 1 + (2^p - 1) = 2^p$ et les diviseurs (positifs) de 2^{p-1} sont les nombres 2^k, où $k \in [\![0, p-1]\!]$ donc :

$$\sigma(2^{p-1}) = \sum_{k=0}^{p-1} 2^k = \frac{2^p - 1}{2 - 1} = 2^p - 1$$

On a donc bien $\sigma(n) = 2n$. Ainsi :

$$\boxed{\text{l'entier } n = 2^{p-1}(2^p - 1) \text{ est parfait}}$$

7. Soit n un entier pair parfait. Posons $p = 1 + v_2(n)$, où $v_2(n)$ est la valuation 2-adique de n. Par définition de la valuation, l'entier $\dfrac{n}{2^{v_2(n)}}$ est impair. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^{v_2(n)}(2k+1) = 2^{p-1}(2k+1)$. La fonction σ est multiplicative et l'entier n est parfait donc :

$$2n = \sigma(n) = \sigma(2^{p-1})\sigma(2k+1) \qquad i.e. \qquad 2^p(2k+1) = (2^p - 1)\sigma(2k+1) \tag{$*$}$$

Les entiers 2^p et $2^p - 1$ sont premiers entre eux donc l'égalité précédente et le lemme de Gauss entraînent la relation $2^p - 1 \mid 2k+1$. Il existe donc $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $2k+1 = (2^p - 1)\ell$. La relation $(*)$ nous donne l'égalité $\sigma(2k+1) = 2^p\ell$. On sait que $p \geqslant 2$ (car n est pair) donc $2^p - 1 \neq 1$. Ainsi, $(2^p - 1)\ell$ et ℓ sont des diviseurs distincts de $2k+1$. Ainsi :

$$\sigma(2k+1) \geqslant \ell + (2^p - 1)\ell = 2^p\ell$$

Comme $\sigma(2k+1) = 2^p\ell$, les entiers $(2^p - 1)\ell$ et ℓ sont les seuls diviseurs de $2k+1$ donc $2k+1$ est un nombre premier. Ainsi, $\ell = 1$ et $2k + 1 = 2^p - 1$. Finalement, $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$. Donc :

$$\boxed{\text{tout nombre parfait pair est de la forme } 2^{p-1}(2^p - 1) \text{ où } p \text{ est un nombre premier}}$$