

DEVOIR SURVEILLÉ 5

un corrigé

Exercice (arithmétique).

1. *Question de cours.*

(a) Les énoncés sont les suivants :

Théorème de Bézout : $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad a \wedge b = 1 \iff (\exists u, v \in \mathbb{Z}, au + bv = 1)$

et :

Lemme de Gauss : $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad (a \mid bc \text{ et } a \wedge b = 1) \implies a \mid c$

(b) Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On suppose que $a \mid bc$ et que $a \wedge b = 1$. D'après le théorème de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$. En multipliant par c , il vient $auc + bvc = c$. Or $a \mid bc$ et $a \mid auc$ donc $a \mid (auc + bvc)$, i.e. $a \mid c$. Le lemme de Gauss est démontré.

2. *Une équation diophantienne.*

(a) Les entiers 11 et 24 sont premiers entre eux (en effet, 11 est un nombre premier et 24 n'est pas un multiple de 11) donc :

d'après le théorème de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $11u + 24v = 1$ ou, si on préfère, il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $11m - 24n = 1$

(b) On utilise l'algorithme d'Euclide étendu. On a :

$$24 = 11 \times 2 + 2 \quad \text{puis} \quad 11 = 2 \times 5 + 1 \quad \text{puis} \quad 5 = 5 \times 1 + 0$$

En remontant les égalités, il vient :

$$1 = 11 - 2 \times 5 = 11 - 5 \times (24 - 11 \times 2) = 11 \times 11 - 5 \times 24$$

Ainsi :

une solution particulière de (D) est $(m_0, n_0) = (11, 5)$

(c) Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (D) .

★ Soit $(m, n) \in \mathcal{S}$. Alors $11m - 24n = 1$ et on a aussi $11m_0 - 24n_0 = 1$. En soustrayant la deuxième équation à la première, il vient $11(m - m_0) - 24(n - n_0) = 0$, soit encore :

$$11(m - m_0) = 24(n - n_0) \tag{*}$$

Ainsi, $24 \mid 11(m - m_0)$. Or $24 \wedge 11 = 1$ donc, d'après le lemme de Gauss, $24 \mid m - m_0$. Autrement dit, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m - m_0 = 24k$, i.e. tel que $m = m_0 + 24k$. En remplaçant dans (*), il vient $11 \times 24k = 24(n - n_0)$. On en déduit que $n - n_0 = 11k$, i.e. que $n = n_0 + 11k$. Finalement, $(m, n) = (m_0 + 24k, n_0 + 11k)$, ce qui démontre l'inclusion :

$$\mathcal{S} \subset \{(m_0 + 24k, n_0 + 11k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

★ On établit maintenant l'inclusion réciproque. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$11(m_0 + 24k) - 24(n_0 + 11k) = 11m_0 + 11 \times 24k - 24n_0 - 24 \times 11k = 11m_0 - 24n_0 = 1$$

car (m_0, n_0) est une solution de (D) . On a donc bien l'inclusion :

$$\{(m_0 + 24k, n_0 + 11k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{S}$$

Par double inclusion, on peut conclure que :

l'ensemble des solutions de (D) est $\mathcal{S} = \{(11 + 24k, 5 + 11k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

3. Une application.

- (a) On a $10 \equiv 1 [9]$ donc, par compatibilité de la relation de congruence avec l'exponentiation positive entière, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 10^k \equiv 1^k \equiv 1 [9],$$

ce qui signifie que 9 divise $10^k - 1$. Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ le nombre } 10^k - 1 \text{ est un multiple de } 9}$$

- (b) Soit $(m, n) \in \mathcal{S}$. Alors $11m - 24n = 1$ donc $11m = 24n + 1$ puis :

$$(10^{11m} - 1) - 10(10^{24n} - 1) = (10^{24n+1} - 1) - 10^{24n+1} + 10 = 9$$

Donc :

$$\boxed{\forall (m, n) \in \mathcal{S}, \quad (10^{11m} - 1) - 10(10^{24n} - 1) = 9}$$

- (c) Soit (m, n) une solution quelconque de (D). On sait que :

$$10^{11m} - 1 = (10^{11})^m - 1^m = (10^{11} - 1) \sum_{k=0}^{m-1} 10^{11k} \quad \text{et} \quad 10^{24n} - 1 = (10^{24} - 1) \sum_{k=0}^{n-1} 10^{24k}$$

Posons $M = \sum_{k=0}^{m-1} 10^{11k}$ et $N = \sum_{k=0}^{n-1} 10^{24k}$. Il est clair que M et N sont des entiers (naturels) et on a la relation :

$$(10^{11} - 1)M - (10^{24} - 1)N = 9$$

Ainsi :

$$\boxed{\exists (M, N) \in \mathbb{Z}^2, \quad (10^{11} - 1)M - (10^{24} - 1)N = 9}$$

- (d) Posons $d = (10^{11} - 1) \wedge (10^{24} - 1)$.

- ★ D'après la question 3.(a), les nombres $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$ sont divisibles par 9. Par définition du PGCD, on a donc $d \geq 9$.
- ★ Par définition du PGCD, on a aussi $d \mid 10^{11} - 1$ et $d \mid 10^{24} - 1$ donc, si (M, N) est un couple d'entiers qui vérifie la relation de la question précédente, on a aussi $d \mid (10^{11} - 1)M - (10^{24} - 1)N$, i.e. $d \mid 9$. En particulier, on a donc $d \leq 9$.

Par antisymétrie de la relation $\leq$, on a peut conclure que $d = 9$. Ainsi :

$$\boxed{(10^{11} - 1) \wedge (10^{24} - 1) = 9}$$

Exercice 2 (étude d'une suite implicite).

1. La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ donc f_n est définie sur :

$$\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-n, -n+1, \dots, -1, 0\} =]-\infty, -n[\cup \left(\bigcup_{\ell=1}^n]-\ell, -\ell+1[\right) \cup]0, +\infty[}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^0 \frac{1}{x+k} = a \iff \frac{1}{x} = a \iff x = \frac{1}{a} \quad (\text{car } a \neq 0)$$

et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^1 \frac{1}{x+k} = a &\iff \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = a \iff \frac{2x+1}{x(x+1)} = a \iff 2x+1 = ax(x+1) \\ &\iff ax^2 + (a-2)x - 1 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

L'équation (1) est du second degré (car $a \neq 0$) ; elle admet pour discriminant $(a-2)^2 + 4a > 0$ (puisque $(a-2)^2 \geq 0$ et $a > 0$). Celle-ci admet donc pour racines (réelles distinctes) $\frac{2-a \pm \sqrt{(a-2)^2 + 4a}}{2a}$. Donc :

$$(E_0) \text{ a pour racine } \frac{1}{a} \text{ et } (E_1) \text{ a deux racines réelles distinctes qui sont } \frac{2 - a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2a}$$

3. Dénombrement des racines de l'équation (E_n)

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f'_n(x) = - \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{1}{(x+k)^2}}_{>0} < 0$$

Ainsi :

la fonction f_n est strictement décroissante sur chaque intervalle constitutif de $\mathcal{D}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$ (car elle y est dérivable) et elle est y strictement décroissante. D'après le théorème de la bijection, la fonction f_n réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur l'intervalle :

$$f_n(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) \right[$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+k} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ (somme de limites). De plus :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+k} = \frac{1}{k} \in \mathbb{R} \quad \text{tandis que} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty$ et donc $f_n(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$. Comme $a \in]0, +\infty[$ (par hypothèse), on peut conclure que :

l'équation $f_n(x) = a$ (c'est-à-dire (E_n)) admet une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$

(c) On étudie l'existence de solutions de l'équation (E_n) sur chacun des intervalles constitutifs de $\mathcal{D}$. La fonction f_n est continue et strictement décroissante sur chacun des intervalles constitutifs de $\mathcal{D}$ donc le théorème de la bijection s'applique sur chacun d'eux.

★ **Étude sur l'intervalle $]-\infty, -n[$**

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0$ (même calcul qu'à la question précédente) et $\lim_{x \rightarrow -n^-} f_n(x) = -\infty$ car :

$$\lim_{x \rightarrow -n^-} \frac{1}{x+n} = -\infty \quad \text{tandis que} \quad \lim_{x \rightarrow -n^-} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{-n+k} \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $f_n(]-\infty, -n[) =]-\infty, 0[$ donc $a \notin f_n(]-\infty, -n[)$ (car $a > 0$). L'équation (E_n) n'admet donc pas de solution dans l'intervalle $]-\infty, -n[$.

★ **Étude sur l'intervalle $]-\ell, -\ell+1[$ où $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$**

On a $\lim_{x \rightarrow -\ell^+} f_n(x) = +\infty$ car :

$$\lim_{x \rightarrow -\ell^+} \frac{1}{x+\ell} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\ell^+} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \ell}}^n \frac{1}{x+k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \ell}}^n \frac{1}{-\ell+k} \in \mathbb{R}$$

et $\lim_{x \rightarrow (-\ell+1)^-} f_n(x) = -\infty$ car :

$$\lim_{x \rightarrow (-\ell+1)^-} \frac{1}{x+\ell-1} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow (-\ell+1)^-} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \ell-1}}^n \frac{1}{x+k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \ell-1}}^n \frac{1}{-\ell+1+k} \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $f_n(]-\ell, -\ell+1[) = \mathbb{R}$ donc $a \in f_n(]-\ell, -\ell+1[)$. L'équation (E_n) admet donc une unique solution dans l'intervalle $]-\ell, -\ell+1[$.

Il y a n intervalles dans la réunion $\bigcup_{\ell=1}^n]-\ell, -\ell+1[$ donc l'équation (E_n) admet n racines dans cette réunion. Enfin, on a vu à la question 2.(b) que (E_n) admettait également une (unique) solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$. Finalement :

l'équation (E_n) admet exactement $n+1$ racines réelles

4. Étude rapide de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de Chasles, on a pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{x+k} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{x+k} = \frac{1}{x+n+1} > 0 \quad (\text{car } x > 0 \text{ et } n+1 > 0)$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } f_{n+1} - f_n \text{ est à valeurs (strictement) positives sur }]0, +\infty[}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $x_n \in]0, +\infty[$, on peut utiliser la question précédente :

$$f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n) \geq 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad f_{n+1}(x_n) \geq a \quad (\text{car } f_n(x_n) = a)$$

Or on a aussi $f_{n+1}(x_{n+1}) = a$ donc l'inégalité précédente se réécrit $f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$. La fonction f_{n+1} est *strictement* décroissante sur $]0, +\infty[$ et $(x_n, x_{n+1}) \in]0, +\infty[^2$ donc $x_n \leq x_{n+1}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}}$$

5. Équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$

- (a) Le théorème des accroissements finis s'énonce comme suit :

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur l'ouvert $]a, b[$. Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

- (b) Soit $x \in]1, +\infty[$. Alors $(x, x-1) \in]0, +\infty[^2$. La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc elle est en particulier continue sur $[x-1, x]$ et dérivable sur $]x-1, x[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x-1, x[$ tel que :

$$\ln(x) - \ln(x-1) = \ln'(c) = \frac{1}{c}$$

Or $0 < x-1 \leq c \leq x$ donc $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{x-1}$ par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{x} \leq \ln(x) - \ln(x-1) \leq \frac{1}{x-1}}$$

- (c) Soit $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0, +\infty[$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{1}{x+k} \leq \ln(x+k) - \ln(x+k-1) \leq \frac{1}{x+k-1} \quad (\text{car } x+k > 1 \text{ car } x > 0 \text{ et } k \geq 1)$$

En sommant ces inégalités, il vient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k} \leq \sum_{k=1}^n (\ln(x+k) - \ln(x+k-1)) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k-1}$$

D'après la relations de Chasles, on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k} = f_n(x) - \frac{1}{x}$. La somme *du milieu* est télescopique et vaut :

$$\sum_{k=1}^n (\ln(x+k) - \ln(x+k-1)) = \ln(x+n) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+n}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)$$

Enfin, le changement d'indice $\ell = k-1$ et la relation de Chasles dans la troisième somme fournissent :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{x+\ell} = \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{x+\ell} - \frac{1}{x+n} = f_n(x) - \frac{1}{x+n}$$

Finalement :

$$\boxed{f_n(x) - \frac{1}{x} \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) \leq f_n(x) - \frac{1}{x+n}}$$

puis, en évaluant en $x_n \in]0, +\infty[$, on obtient bien (puisque $f_n(x_n) = a$ par définition de x_n) :

$$\boxed{a - \frac{1}{x_n} \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x_n}\right) \leq a - \frac{1}{x_n + n}}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité de droite précédemment établie, on a :

$$a \geq \ln \left(1 + \frac{n}{x_n} \right) + \underbrace{\frac{1}{x_n + n}}_{\geq 0} \geq \ln \left(1 + \frac{n}{x_n} \right)$$

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\exp \circ \ln = \text{Id}_{]0, +\infty[}$ donc :

$$e^a \geq 1 + \frac{n}{x_n} \quad \text{puis} \quad \frac{e^a - 1}{n} \geq \frac{1}{x_n} \quad (\text{car } n > 0)$$

En utilisant enfin la décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on obtient bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n \geq \frac{n}{e^a - 1}}$$

(e) Comme $a > 0$, on a $e^a > e^0$ (par croissance stricte de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$), c'est-à-dire $e^a - 1 > 0$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^a - 1} = +\infty$. Le théorème de comparaison permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty}$$

Ceci implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a - \frac{1}{x_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a - \frac{1}{x_n + n} \right) = a$. La deuxième série d'inégalités obtenues à la question 5.(c) et le théorème des gendarmes nous donnent donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{n}{x_n} \right) = a}$$

(f) La limite précédente implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n}{x_n} \right) = e^a$ (par composition des limites avec la fonction exponentielle continue en a). Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{x_n} = e^a - 1 \neq 0$. Ceci se réécrit :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(e^a - 1)x_n}{n} = 1}$$

Exercice 3 (étude d'une suite récurrente).

1. Question préliminaire.

La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[a, b]$ comme différence de fonctions qui le sont. De plus, comme $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à $[a, b]$ par hypothèse (en effet, f est à valeurs dans $[a, b]$), on a :

$$g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0 \quad \text{et} \quad g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$$

Ainsi, $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes contraires donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, i.e. tel que $f(c) - c = 0$. Autrement dit :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet au moins un point fixe dans } [a, b]}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $\ln$ et $\sqrt{\cdot}$ sont respectivement définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+$ donc :

$$x \in \mathcal{D}_\varphi \iff \begin{cases} x > 0 \\ 2 - \ln(x) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \leq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \leq e^2 \end{cases}$$

par croissance stricte de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est définie sur } \mathcal{D}_\varphi =]0, e^2]}$$

3. Les fonctions $\ln$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, en reprenant le raisonnement précédent, on obtient que :

la fonction φ est dérivable sur $D_\varphi =]0, e^2[$

De plus :

$$\forall x \in D_\varphi, \quad \varphi'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{2-\ln(x)}} = -\frac{1}{2x\sqrt{2-\ln(x)}} < 0$$

Ainsi, la fonction φ est strictement décroissante sur $]0, e^2]$.

x	0	e^2
$\varphi(x)$	$+\infty$	0

4. (a) D'après ce qui précède, on a :

$$\varphi([1, e]) = [\varphi(e), \varphi(1)] = [1, \sqrt{2}]$$

Or $\sqrt{2} \leq \sqrt{4}$, donc $\sqrt{2} \leq 2 \leq e$ (d'après l'inégalité donnée au début de l'exercice). Ainsi, $[1, \sqrt{2}] \subset [1, e]$. Par conséquent :

l'intervalle $[1, e]$ est stable par la fonction φ

(b) La restriction de φ à l'intervalle $[1, e]$ est à valeurs dans $[1, e]$ d'après la question précédente.

- ★ Comme cette fonction est continue sur $[1, e]$, la question préliminaire assure l'existence d'un point fixe pour φ dans $[1, e]$.
- ★ Par ailleurs, la fonction $g : x \mapsto \varphi(x) - x$ est une somme de fonctions strictement décroissantes sur $[1, e]$. Ainsi, g est injective sur $[1, e]$ donc g s'annule une unique fois sur $[1, e]$.

Ainsi :

la fonction φ admet un unique point fixe dans $[1, e]$

5. On a :

$u_0 \in [1, e]$ et $[1, e]$ est stable par φ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [1, e]$

par une récurrence immédiate.

6. (a) On sait que φ est dérivable sur $[1, e]$ (puisque'elle l'est sur D_φ qui contient $[1, e]$) et :

$$\forall x \in [1, e], \quad |\varphi'(x)| = \frac{1}{2x\sqrt{2-\ln(x)}}$$

Soit $x \in [1, e]$. On a $\ln(x) \leq 1$ puis $2 - \ln(x) \geq 1$. Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, il vient $\sqrt{2 - \ln(x)} \geq 1$. Par ailleurs, $2x \geq 2$ donc, en multipliant terme à terme, on obtient $2x\sqrt{2 - \ln(x)} \geq 2$. En passant à l'inverse, on en déduit que $\frac{1}{2x\sqrt{2 - \ln(x)}} \leq \frac{1}{2}$. Autrement dit :

$$\forall x \in [1, e], \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

D'après le théorème sur l'inégalité des accroissements finis, on peut conclure que :

la fonction φ est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[1, e]$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$\forall x, y \in [1, e], \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{1}{2} \times |x - y|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n, \ell \in [1, e]$, on a :

$$|\varphi(u_n) - \varphi(\ell)| \leq \frac{|u_n - \ell|}{2}$$

Or $\varphi(u_n) = u_{n+1}$ et $\varphi(\ell) = \ell$ (car ℓ est un point fixe de φ) donc on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} \times |u_n - \ell|$$

(c) On utilise un raisonnement par récurrence.

★ On sait que $u_0 = 1$ et que $\ell \in [1, e]$ donc $\ell - 1 \leq 0$ et :

$$|u_0 - \ell| = |1 - \ell| = \ell - 1 \leq e - 1 = \frac{e - 1}{2^0}$$

L'inégalité est donc vérifiée au rang $n = 0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $|u_n - \ell| \leq \frac{e - 1}{2^n}$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &\leq \frac{1}{2} \times |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2} \times \frac{e - 1}{2^n} \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{e - 1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

donc l'inégalité est vérifiée au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq \frac{e - 1}{2^n}}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$-\frac{e - 1}{2^n} \leq u_n - \ell \leq \frac{e - 1}{2^n} \quad \text{puis} \quad \ell - \frac{e - 1}{2^n} \leq u_n \leq \ell + \frac{e - 1}{2^n}$$

Or $\ell \pm \frac{e - 1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\text{la suite } u \text{ est convergente de limite } \ell}$$

Exercice 4 (série de Riemann).

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (propriété des fonctions puissances à exposant réel) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = (1 - \alpha)x^{-\alpha} \geq 0 \quad (\text{car } \alpha \leq 1 \text{ et } x^{-\alpha} \geq 0)$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, en particulier, f est continue sur $[k, k + 1]$ et dérivable sur $]k, k + 1[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]k, k + 1[$ tel que :

$$\frac{f(k + 1) - f(k)}{(k + 1) - k} = f'(c) \quad \text{i.e. tel que} \quad (k + 1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} = (1 - \alpha)c^{-\alpha} = \frac{1 - \alpha}{c^\alpha}$$

En divisant par $1 - \alpha \neq 0$ (car $\alpha \in]0, 1[$), on peut conclure que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists c \in]k, k + 1[, \quad \frac{1}{c^\alpha} = \frac{(k + 1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1 - \alpha}}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On sait qu'il existe $c \in]k, k + 1[$ tel que :

$$\frac{1}{c^\alpha} = \frac{(k + 1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1 - \alpha}$$

Or $c \geq k > 0$ et la fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $-\alpha \leq 0$) donc :

$$c^{-\alpha} \leq k^{-\alpha} \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{c^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{(k + 1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1 - \alpha}}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Sommons ces inégalités :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)$$

où (la somme de droite est télescopique) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) &= \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^n ((k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha} ((n+1)^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}) \\ &= \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}}$$

5. On sait que $\alpha \in]0, 1[$ donc $1-\alpha > 0$. On en déduit que $\frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Le théorème de comparaison et les inégalités obtenues à la question précédente permettent de conclure que :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$$

6. On sait que (inégalité de concavité du logarithme) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k} \geq \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln(k+1) - \ln(k)$$

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)),$$

i.e. (la somme de droite étant télescopique) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq \ln(n+1)$$

Or $\ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$$

7. On suppose que $\alpha \in]1, +\infty[$. La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \geq 0$$

Pour montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente, il suffit donc de démontrer que cette suite est majorée. Le même raisonnement que celui mené aux questions 2. et 3. nous permet d'obtenir que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{k^{1-\alpha} - (k+1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$

ou encore :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{(k-1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. En sommant les inégalités précédentes sur les entiers $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on obtient :

$$u_n - 1 = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=2}^n \frac{(k-1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$

donc :

$$u_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$

Cette inégalité est valable également pour $n = 1$ donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est majorée par $1 + \frac{1}{\alpha - 1}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{si } \alpha > 1, \text{ la suite } (u_n)_{n \geq 1} \text{ est convergente}}$$