

# DEVOIR SURVEILLÉ 5

un corrigé

## Exercice (arithmétique).

1. *Question de cours.*

(a) Les énoncés sont les suivants :

**Théorème de Bézout :**  $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad a \wedge b = 1 \iff (\exists u, v \in \mathbb{Z}, \quad au + bv = 1)$

et :

**Lemme de Gauss :**  $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad (a \mid bc \text{ et } a \wedge b = 1) \implies a \mid c$

(b) Soit  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . On suppose que  $a \mid bc$  et que  $a \wedge b = 1$ . D'après le théorème de Bézout, il existe  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  $au + bv = 1$ . En multipliant par  $c$ , il vient  $auc + bvc = c$ . Or  $a \mid bc$  et  $a \mid auc$  donc  $a \mid (auc + bvc)$ , i.e.  $a \mid c$ . Le lemme de Gauss est démontré.

2. *Une équation diophantienne.*

(a) Les entiers 11 et 24 sont premiers entre eux (en effet, 11 est un nombre premier et 24 n'est pas un multiple de 11) donc :

d'après le théorème de Bézout, il existe  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  $11u + 24v = 1$  ou, si on préfère, il existe  $m, n \in \mathbb{Z}$  tels que  $11m - 24n = 1$

(b) On utilise l'algorithme d'Euclide étendu. On a :

$$24 = 11 \times 2 + 2 \quad \text{puis} \quad 11 = 2 \times 5 + 1 \quad \text{puis} \quad 5 = 5 \times 1 + 0$$

En remontant les égalités, il vient :

$$1 = 11 - 2 \times 5 = 11 - 5 \times (24 - 11 \times 2) = 11 \times 11 - 5 \times 24$$

Ainsi :

une solution particulière de (D) est  $(m_0, n_0) = (11, 5)$

(c) Notons  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de (D).

★ Soit  $(m, n) \in \mathcal{S}$ . Alors  $11m - 24n = 1$  et on a aussi  $11m_0 - 24n_0 = 1$ . En soustrayant la deuxième équation à la première, il vient  $11(m - m_0) - 24(n - n_0) = 0$ , soit encore :

$$11(m - m_0) = 24(n - n_0) \tag{*}$$

Ainsi,  $24 \mid 11(m - m_0)$ . Or  $24 \wedge 11 = 1$  donc, d'après le lemme de Gauss,  $24 \mid m - m_0$ . Autrement dit, il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $m - m_0 = 24k$ , i.e. tel que  $m = m_0 + 24k$ . En remplaçant dans (\*), il vient  $11 \times 24k = 24(n - n_0)$ . On en déduit que  $n - n_0 = 11k$ , i.e. que  $n = n_0 + 11k$ . Finalement,  $(m, n) = (m_0 + 24k, n_0 + 11k)$ , ce qui démontre l'inclusion :

$$\mathcal{S} \subset \{(m_0 + 24k, n_0 + 11k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

★ On établit maintenant l'inclusion réciproque. Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$11(m_0 + 24k) - 24(n_0 + 11k) = 11m_0 + 11 \times 24k - 24n_0 - 24 \times 11k = 11m_0 - 24n_0 = 1$$

car  $(m_0, n_0)$  est une solution de (D). On a donc bien l'inclusion :

$$\{(m_0 + 24k, n_0 + 11k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{S}$$

Par double inclusion, on peut conclure que :

l'ensemble des solutions de (D) est  $\mathcal{S} = \{(11 + 24k, 5 + 11k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

3. *Une application.*

(a) On a  $10 \equiv 1 [9]$  donc, par compatibilité de la relation de congruence avec l'exponentiation positive entière, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 10^k \equiv 1^k \equiv 1 [9],$$

ce qui signifie que 9 divise  $10^k - 1$ . Ainsi :

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , le nombre  $10^k - 1$  est un multiple de 9

(b) Soit  $(m, n) \in \mathcal{S}$ . Alors  $11m - 24n = 1$  donc  $11m = 24n + 1$  puis :

$$(10^{11m} - 1) - 10(10^{24n} - 1) = (10^{24n+1} - 1) - 10^{24n+1} + 10 = 9$$

Donc :

$\forall (m, n) \in \mathcal{S}, \quad (10^{11m} - 1) - 10(10^{24n} - 1) = 9$

(c) Soit  $(m, n)$  une solution quelconque de (D). On sait que :

$$10^{11m} - 1 = (10^{11})^m - 1^m = (10^{11} - 1) \sum_{k=0}^{m-1} 10^{11k} \quad \text{et} \quad 10^{24n} - 1 = (10^{24} - 1) \sum_{k=0}^{n-1} 10^{24k}$$

Posons  $M = \sum_{k=0}^{m-1} 10^{11k}$  et  $N = \sum_{k=0}^{n-1} 10^{24k}$ . Il est clair que  $M$  et  $N$  sont des entiers (naturels) et on a la relation :

$$(10^{11} - 1)M - (10^{24} - 1)N = 9$$

Ainsi :

$\exists (M, N) \in \mathbb{Z}^2, \quad (10^{11} - 1)M - (10^{24} - 1)N = 9$

(d) Posons  $d = (10^{11} - 1) \wedge (10^{24} - 1)$ .

★ D'après la question 3.(a), les nombres  $10^{11} - 1$  et  $10^{24} - 1$  sont divisibles par 9. Par définition du PGCD, on a donc  $d \geq 9$ .

★ Par définition du PGCD, on a aussi  $d \mid 10^{11} - 1$  et  $d \mid 10^{24} - 1$  donc, si  $(M, N)$  est un couple d'entiers qui vérifie la relation de la question précédente, on a aussi  $d \mid (10^{11} - 1)M - (10^{24} - 1)N$ , i.e.  $d \mid 9$ . En particulier, on a donc  $d \leq 9$ .

Par antisymétrie de la relation  $\leq$ , on a peut conclure que  $d = 9$ . Ainsi :

$(10^{11} - 1) \wedge (10^{24} - 1) = 9$

## Problème 1 (étude d'une suite récurrente).

### Partie A : informatique et conjectures

1. (a) On initialise une liste  $L$  contenant  $x_0$ . À l'étape  $k$ , le terme  $x_k$  de la suite est calculé à l'aide de la relation de récurrence et du dernier terme  $L[-1]$  de la liste (qui correspond à  $x_{k-1}$ ).

```
def suite(n,x0) :
    L = [x0]
    for k in range(1,n+1) :
        L.append(L[-1]+1+1/(L[-1]-1))
    return L
```

*Remarque* : on peut remplacer  $L[-1]$  par  $L[k-1]$  dans la boucle.

- (b) Le nombre  $x_n$  correspond au dernier élément de la liste `suite(n,x0)` (c'est-à-dire à `suite(n,x0)[-1]`). On incrémente la valeur de  $n$  tant que  $x_n < M$ .

```
def depasse(x0,M) :
    n = 0
    while (suite(n,x0) < M) :
        n += 1
    return n
```

2. La fonction  $f$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  comme somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

On en déduit le tableau de signes de  $f'$  ainsi que le tableau de variations de  $f$  suivants :

$x$	1	2	$+\infty$
$\frac{x}{(x-1)^2}$	+	+	
$x-2$	-	0	+
$f'(x)$		0	+
$f$	$+\infty$	4	$+\infty$

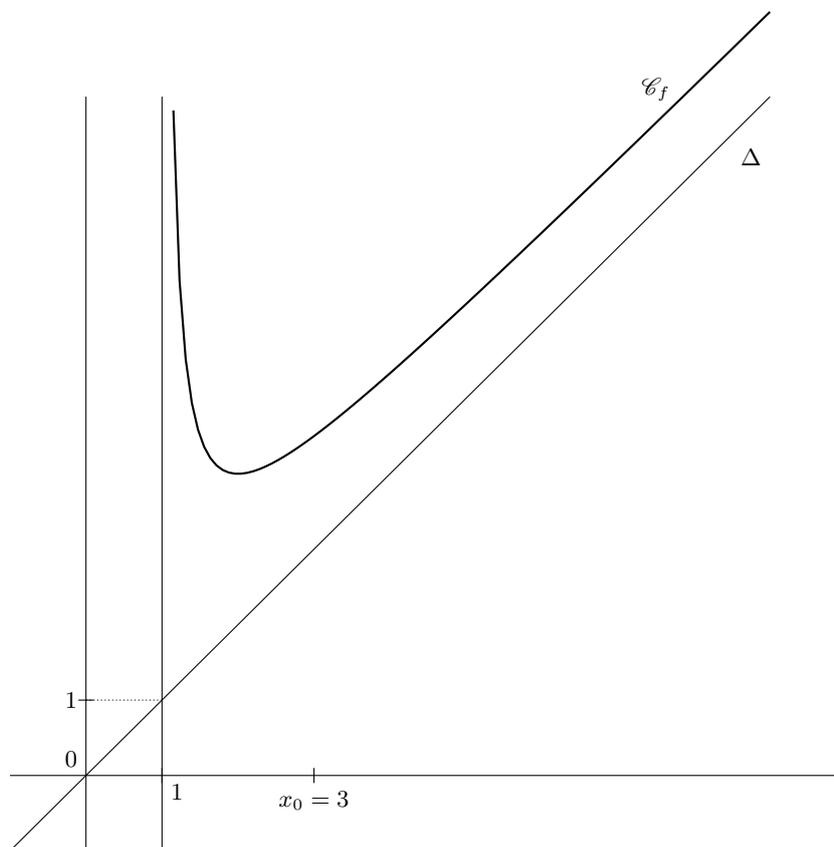
Les limites en  $1^+$  et en  $+\infty$  sont immédiates. Par ailleurs,  $f(]1, +\infty[) = [4, +\infty[$  donc :

$$f(]1, +\infty[) \subset ]1, +\infty[, \text{ ce qui signifie que l'intervalle } ]1, +\infty[ \text{ est stable par } f$$

Par conséquent :

$$\text{partant de } x_0 \in ]1, +\infty[, \text{ une récurrence immédiate implique que pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } x_n \in ]1, +\infty[$$

3. Pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ , on a  $\frac{1}{x-1} \geq 0$  et  $1 \geq 0$  donc  $f(x) \geq x$ . La courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  est donc au-dessus de la droite  $\Delta$  sur l'intervalle  $]1, +\infty[$ .



Graphes de la fonction  $f$  et de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

La conjecture émise est la suivante :

$$\text{La suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ semble croissante et divergente de limite } +\infty.$$

### Partie B : limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{1}{x_n - 1}$ . Or  $x_n \in ]1, +\infty[$  d'après la question précédente donc  $x_n > 1$  puis  $\frac{1}{x_n - 1} > 0$ . Par conséquent,  $x_{n+1} - x_n \geq 1 > 0$ . Ainsi :

$$\text{la suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est (strictement) croissante.}$$

5. Comme  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, le théorème de la limite monotone nous permet de dire que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , qui est soit finie, soit égale à  $+\infty$ . Montrons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$  en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$  (limite finie).

★ Tout d'abord, remarquons que  $\ell > 1$ . En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $x_n \geq x_0 > 1$  (par croissance de la suite) et donc, en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient  $\ell \geq x_0 > 1$ .

★ On sait ensuite que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$x_{n+1} = x_n + 1 + \frac{1}{x_n - 1}$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans cette égalité (ce qui est licite car  $\ell \neq 1$ ), on obtient  $\ell = \ell + 1 + \frac{1}{\ell - 1}$  d'où l'on déduit l'égalité  $\ell = 0$ . Ceci est absurde car  $\ell > 1$ .

Finalement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty}$$

6. (a) Un utilise un raisonnement par récurrence.

★ Par hypothèse, on a  $x_0 \in ]1, +\infty[$  donc  $x_0 > 1$  et on a bien  $x_0 \geq 0 + 1$ . L'inégalité est donc vérifiée au rang 0.

★ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $x_n \geq n + 1$ . Montrons que  $x_{n+1} \geq n + 2$ . On sait que  $x_{n+1} = x_n + 1 + \frac{1}{x_n - 1}$ .

Par hypothèse de récurrence, on a  $x_n \geq n + 1$  donc  $x_{n+1} \geq n + 2 + \frac{1}{x_n - 1}$ . Or on sait que  $x_n \in ]1, +\infty[$

donc  $\frac{1}{x_n - 1} \geq 0$  puis  $x_{n+1} \geq n + 2$ . Finalement, l'inégalité est vérifiée au rang  $n + 1$ .

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \geq n + 1}$$

(b) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On a  $x_{k+1} - x_k - 1 = \frac{1}{x_k - 1}$ . Comme  $x_k > 1$ , on a  $\frac{1}{x_k - 1} \geq 0$ . De plus, on sait d'après la question précédente que  $x_k \geq k + 1$  donc  $x_k - 1 \geq k > 0$  puis, par décroissance de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$ , il vient  $\frac{1}{x_k - 1} \leq \frac{1}{k}$ . Finalement :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq x_{k+1} - x_k - 1 \leq \frac{1}{k}}$$

(c) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . D'après la question précédente, pour tout  $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ , on a  $0 \leq x_{k+1} - x_k - 1 \leq \frac{1}{k}$ . En sommant ces inégalités, il vient :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k - 1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Or, par linéarité de la somme,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k - 1) = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=1}^{n-1} 1 = x_n - x_1 - (n - 1)$$

puisque la somme  $\sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)$  est télescopique. On en déduit les inégalités annoncées :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq x_n - x_1 - (n - 1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}$$

(d) i. La fonction  $g : x \mapsto x - \ln(1 + x)$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  et :

$$\forall x \in ] -1, +\infty[, \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Pour tout  $x \in ] -1, +\infty[$ , on a  $1 + x > 0$  donc  $g'(x)$  est du signe de  $x$ .

$x$	-1	0	$+\infty$
$g$	$+\infty$	0	$+\infty$

La fonction  $g$  présente un minimum en 0 qui vaut  $g(0) = 0$ . On en déduit que la fonction  $g$  est à valeurs positives. On en déduit immédiatement l'inégalité annoncée, à savoir que :

$$\boxed{\forall x \in ]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x}$$

ii. Soit  $k$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Alors :

$$\ln(k) - \ln(k-1) = -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \geq -\underbrace{\left(-\frac{1}{k}\right)}_{=\frac{1}{k}}$$

d'après la question précédente car  $-\frac{1}{k} \in ]-1, +\infty[$  (puisque  $k \geq 2$ ) et en multipliant par  $-1 \leq 0$ . Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)}$$

(e) Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. D'après la question 6.(c), on a :

$$x_n \leq x_1 + n - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

et en isolant l'indice  $k = 1$  de la somme (relation de Chasles), on a :

$$x_n \leq x_1 + n + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Or pour tout  $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ , on sait que  $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$  d'après la question précédente. Donc (en sommant les inégalités) :

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n-1} (\ln(k) - \ln(k-1))$$

et comme la somme dans le membre de droite est télescopique, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \ln(n-1) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}$$

Finalement,  $x_n \leq x_1 + n + \ln(n-1)$ . La minoration de  $x_n$  a déjà été établie à la question 6.(a). Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, \quad n+1 \leq x_n \leq x_1 + n + \ln(n-1)}$$

(f) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ . En divisant par  $n$  dans les inégalités précédentes, on a :

$$1 + \frac{1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{x_1}{n} + 1 + \frac{\ln(n-1)}{n}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_1}{n} = 0$  et (en factorisant par  $n$  dans le logarithme) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n-1)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n} \right) = 0$$

puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$  par croissances comparées. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x_1}{n} + 1 + \frac{\ln(n-1)}{n} \right) = 1$$

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure que :

$$\boxed{\frac{x_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1}$$

## Problème 2 (étude d'une suite implicite).

### Partie A : étude des fonctions $P_n$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. (a) Soit  $x \in [0, +\infty[$ . La fonction  $P_n$  est polynomiale, elle est donc dérivable sur  $[0, +\infty[$  et :

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{2n-1} (-1)^{\ell+1} x^\ell \quad (\text{changement d'indice } \ell = k-1) \\ &= - \sum_{\ell=0}^{2n-1} (-x)^\ell \\ &= - \frac{1 - (-x)^{2n}}{1 - (-x)} \end{aligned}$$

car la somme obtenue est celle des termes d'une suite géométrique de raison  $-x \neq 1$  (en effet,  $-x \leq 0$ ). Comme de plus  $(-x)^{2n} = (-1)^{2n} x^{2n} = x^{2n}$  (puisque  $2n$  est un entier pair), on a bien ;

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad P_n'(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$$

- (b) Soit  $x \in [0, +\infty[$ . Alors  $x + 1 > 0$  donc (d'après la question précédente) :

$$P_n'(x) > 0 \iff x^{2n} - 1 > 0 \iff x^{2n} > 1 \iff x > 1$$

par stricte croissance de la fonction  $t \mapsto t^{\frac{1}{2n}}$  sur  $[0, +\infty[$ . Donc :

la fonction  $P_n$  est strictement croissante sur  $[1, +\infty[$  et, de la même façon, elle décroît strictement sur  $[0, 1]$  ; le tableau de variations de  $P_n$  sur  $[0, +\infty[$  est le suivant :

$x$	0	1	$+\infty$
$P_n'$	-	0	+
$P_n$	0	$P_n(1)$	$+\infty$

2. (a) Pour tout  $x \in [0, +\infty[$ , on a :

$$\int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^x P_n'(t) dt = [P_n(t)]_0^x = P_n(x) - P_n(0)$$

Or  $P_n(0) = 0$  (en effet, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $0^k = 0$ ) donc :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$$

- (b) On propose deux méthodes.

★ **Première méthode** : à l'aide d'une étude de fonction

Considérons la fonction  $f : t \mapsto t^{2n} - 1 - nt^2 + n$  sur l'intervalle  $[1, +\infty[$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  (en tant que fonction polynomiale) et on a :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad f'(t) = 2nt^{2n-1} - 2nt = 2nt(t^{2(n-1)} - 1)$$

Pour tout  $t \in [1, +\infty[$ , on a  $2nt \geq 0$  (puisque  $t \geq 0$  et  $2n \geq 0$ ) et  $t^{2(n-1)} - 1 \geq 0$  (car  $t \geq 1$  et car la fonction  $u \mapsto u^{2(n-1)}$  est croissante sur  $[0, +\infty[$  puisque  $2(n-1) \geq 0$ ), ce qui implique que  $f'(t) \geq 0$ . La fonction  $f$  est donc croissante sur  $[1, +\infty[$ . En particulier, on a :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad f(t) \geq f(1)$$

Ceci démontre l'inégalité proposée puisque  $f(1) = 0$ .

★ **Deuxième méthode** : en simplifiant l'inégalité

Si  $t = 1$ , alors l'inégalité est évidente puisque les deux nombres mis en jeu sont égaux à 0.

Soit maintenant  $t \in ]1, +\infty[$ . Alors  $t^2 - 1 > 0$  et l'inégalité à démontrer est équivalente à :

$$\frac{t^{2n} - 1}{t^2 - 1} \geq n \quad \text{soit encore à} \quad \frac{(t^2)^n - 1}{t^2 - 1} \geq n$$

Le quotient  $\frac{(t^2)^n - 1}{t^2 - 1}$  est la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $t^2 \neq 1$  ; plus exactement :

$$\frac{(t^2)^n - 1}{t^2 - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} (t^2)^k = \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k}$$

Comme  $t \geq 1$ , on a  $t^{2k} \geq 1$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  par croissance de la fonction  $u \mapsto u^{2k}$  sur  $[0, +\infty[$ . En sommant les inégalités, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} \geq \sum_{k=0}^{n-1} 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} \geq n$$

L'inégalité annoncée est démontrée.

Finalement :

$$\boxed{\forall t \in [1, +\infty[, \quad t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)}$$

(c) Soit  $x \in [1, +\infty[$ . D'après la question 2.(a) et la relation de Chasles (pour les intégrales), on a :

$$P_n(x) - P_n(1) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt - \int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_1^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$$

On minore maintenant la dernière intégrale en exploitant l'inégalité de la question 2.(b). Soit  $t \in [1, x]$ . On sait que  $t^{2n} - 1 \geq n(t-1)(t+1)$  et donc, en divisant par  $t+1 > 0$ ,

$$\forall t \in [1, x], \quad \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \geq n(t - 1)$$

Par croissance de l'intégrale, on a (puisque les bornes d'intégration sont dans le bon sens par hypothèse sur  $x$ , à savoir que  $1 \leq x$ ) :

$$\int_1^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \int_1^x n(t - 1) dt \quad \text{avec} \quad \int_1^x n(t - 1) dt = \left[ n \frac{(t-1)^2}{2} \right]_1^x = \frac{n}{2}(x-1)^2$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[, \quad P_n(x) - P_n(1) \geq \frac{n}{2}(x-1)^2}$$

(d) Comme  $\frac{n}{2} > 0$  (puisque  $n \in \mathbb{N}^*$ ), on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{2}(x-1)^2 = +\infty$ . Comme  $P_n(1)$  est une constante, on a aussi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( P_n(1) + \frac{n}{2}(x-1)^2 \right) = +\infty$$

Le théorème de comparaison et l'inégalité obtenue permettent de conclure que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = +\infty}$$

3. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $0^k = 0$  donc :

$$\boxed{P_n(0) = 0}$$

On sait d'après la question 1.(b) que la fonction  $P_n$  est strictement décroissante sur  $[0, 1]$ . Comme  $0 < 1$ , on a  $P_n(0) > P_n(1)$ , c'est-à-dire :

$$\boxed{P_n(1) < 0}$$

4. La fonction  $P_n$  est continue sur l'intervalle  $[1, +\infty[$  (en tant que fonction polynomiale) et elle y est strictement croissante (d'après la question 1.(b)). D'après le théorème de la bijection, la fonction  $P_n$  réalise une bijection de  $[1, +\infty[$  sur l'intervalle :

$$P_n([1, +\infty[) = \left[ P_n(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) \right[ = [P_n(1), +\infty[$$

Comme  $P_n(1) < 0$ , on a  $0 \in P_n([1, +\infty[)$ . Par conséquent :

$$\boxed{\text{l'équation } P_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution } x_n \text{ dans l'intervalle } [1, +\infty[}$$

## Partie B : étude de la suite implicite $(x_n)_{n \geq 1}$

5. Soit  $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times [0, +\infty[$ . On a, d'après la relation de Chasles (pour les sommes),

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) - P_n(x) &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k x^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2} x^{2n+2}}{2n+2} \\ &= -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \quad (\text{car } 2n+1 \text{ est impair et } 2n+2 \text{ est pair}) \end{aligned}$$

et donc, en factorisant par  $x^{2n+1}$ , on a bien :

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, \quad P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = x^{2n+1} \left( -\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right)}$$

6. (a) Soit  $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \left[ \frac{2n+2}{2n+1}, +\infty \right[$ . D'après la question précédente, on a :

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = (2n+2)x^{2n+1} \left( x - \frac{2n+2}{2n+1} \right)$$

Or  $x \geq \frac{2n+2}{2n+1} \geq 0$  donc  $x^{2n+1} \geq 0$  et  $x - \frac{2n+2}{2n+1} \geq 0$ . De plus, on a  $2n+2 \geq 0$  donc, par produit,  $P_{n+1}(x) - P_n(x) \geq 0$ , soit encore  $P_{n+1}(x) \geq P_n(x)$ . Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left[ \frac{2n+2}{2n+1}, +\infty \right[, \quad P_{n+1}(x) \geq P_n(x)$$

- (b) Soit  $x \in \mathbb{N}^*$ . En exploitant l'inégalité obtenue à la question précédente au point  $x = x_n$  (ce qui est licite puisqu'il est admis dans l'énoncé que  $x_n \geq \frac{2n+2}{2n+1}$ ), on a :

$$P_{n+1}(x_n) \geq P_n(x_n)$$

Or, par définition de  $x_n$ , on a  $P_n(x_n) = 0$  donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1}(x_n) \geq 0$$

- (c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par définition de  $x_{n+1}$ , on sait que  $P_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ . L'inégalité obtenue à la question précédente se réécrit donc  $P_{n+1}(x_n) \geq P_{n+1}(x_{n+1})$ . Or on sait que la fonction  $P_{n+1}$  est strictement croissante sur  $[1, +\infty[$  (question 1.(b)) et on sait aussi que  $(x_n, x_{n+1}) \in [1, +\infty[^2$  (question 4.). Par conséquent,  $x_n \geq x_{n+1}$ . Ainsi :

la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est décroissante ; de plus, celle-ci est minorée par 1 donc elle converge (d'après le théorème de la limite monotone)

7. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question 2.(a), on a :

$$P_n(1) = \int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t+1} dt$$

Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a  $0 \leq t^{2n} \leq 1$  donc  $-1 \leq t^{2n} - 1 \leq 0$  puis (en divisant par  $t+1 > 0$ ) :

$$\forall t \in [0, 1], \quad -\frac{1}{t+1} \leq \frac{t^{2n} - 1}{t+1} \leq 0$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes d'intégration sont dans le bon sens :  $0 \leq 1$ ), il vient :

$$-\int_0^1 \frac{1}{t+1} dt \leq P_n(1) \leq 0 \quad \text{avec} \quad \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = \left[ \ln(t+1) \right]_0^1 = \ln(2)$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -\ln(2) \leq P_n(1) \leq 0$$

- (b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $x_n \in [1, +\infty[$ , on a d'après l'inégalité établie à la question 2.(c) :

$$P_n(x_n) - P_n(1) \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2 \quad \text{c'est-à-dire (par définition de } x_n) \quad \frac{n}{2}(x_n - 1)^2 \leq -P_n(1)$$

Or  $-P_n(1) \in [0, \ln(2)]$  d'après la question précédente et  $\frac{n}{2}(x_n - 1)^2 \geq 0$  comme produit de nombres positifs donc :

$$0 \leq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2 \leq \ln(2) \quad \text{puis (en multipliant par } \frac{2}{n} \geq 0) \quad 0 \leq (x_n - 1)^2 \leq \frac{2\ln(2)}{n}$$

Comme la fonction  $t \mapsto \sqrt{t}$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ , on obtient :

$$0 \leq |x_n - 1| \leq \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}$$

On sait que  $x_n \in [1, +\infty[$  donc  $x_n - 1 \geq 0$  ce qui implique que  $|x_n - 1| = x_n - 1$ . Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}}$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}} = 0$  donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite  $(x_n - 1)_{n \geq 1}$  converge de limite 0. On peut donc conclure que :

la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est convergente de limite 1