

DEVOIR SURVEILLÉ 5

un corrigé

Exercice 1.

1. Les diviseurs positifs de 6 sont 1, 2, 3 et 6 donc :

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$$

Les diviseurs positifs de 7 sont 1 et 7 donc :

$$\sigma(7) = 1 + 7 = 8$$

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Alors 1 et n sont deux diviseurs positifs de n et ils sont distincts (puisque $n \geq 2$). Il existe éventuellement d'autres diviseurs positifs de n donc :

$$\sigma(n) \geq n + 1$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si 1 et n sont les seuls diviseurs positifs de n , ce qui revient à dire que n est un nombre premier :

$$\sigma(n) = n + 1 \text{ si et seulement si } n \text{ est un nombre premier}$$

3. (a) Les diviseurs positifs de $n = pq$ sont 1, p , q et pq . Ces diviseurs sont deux à deux distincts donc :

$$\sigma(n) = 1 + p + q + pq = (p + 1)(q + 1) = \sigma(p)\sigma(q)$$

car $\sigma(p) = p + 1$ et $\sigma(q) = q + 1$ (les nombres p et q étant premiers).

- (b) Considérons les entiers $m = 2$ et $n = 4$. On a bien $m \neq n$ et $\sigma(2) = 3$ (car 2 est premier) et :

$$\sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7 \quad \text{et} \quad \sigma(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

Il est clair que $\sigma(mn) \neq \sigma(m)\sigma(n)$ donc :

$$\text{la proposition } \mathcal{P} \text{ est fausse}$$

4. Soient p un nombre premier et $k \in \mathbb{N}$. Les diviseurs positifs de p^k sont les nombres p^ℓ où $\ell \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Ces diviseurs sont deux à deux distincts donc :

$$\sigma(p^k) = \sum_{\ell=0}^k p^\ell = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique (de raison $p \neq 1$ puisque p est un nombre premier).

5. (a) Soit $\delta \in \mathbb{N}^*$. On sait que, en notant $v_r(m)$ la valuation r -adique d'un entier m (où r désigne un nombre premier), on a l'équivalence (qui est une conséquence du théorème fondamental de l'arithmétique) :

$$\begin{aligned} \delta \text{ divise } n &\iff (\forall r \in \mathcal{P}, v_r(\delta) \leq v_r(n)) \\ &\iff \begin{cases} v_p(\delta) \in \llbracket 0, k \rrbracket \text{ (car } v_p(n) = p) \\ v_q(\delta) \in \llbracket 0, \ell \rrbracket \text{ (car } v_q(n) = q) \\ \forall r \in \mathcal{P} \setminus \{p, q\}, v_r(\delta) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall \delta \in \mathbb{N}^*, \quad \delta \mid n \iff (\exists (i, j) \in \llbracket 0, k \rrbracket \times \llbracket 0, \ell \rrbracket, \delta = p^i q^j)$$

- (b) D'après la question précédente, les diviseurs positifs de $n = p^k q^\ell$ sont les nombres de la forme $p^i q^j$ où $(i, j) \in \llbracket 0, k \rrbracket \times \llbracket 0, \ell \rrbracket$. Ces diviseurs sont deux à deux distincts (par unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers) donc :

$$\sigma(n) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\ell} p^i q^j = \left(\sum_{i=0}^k p^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\ell} q^j \right) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} \times \frac{q^{\ell+1} - 1}{q - 1}$$

Exercice 2.

1. La définition demandée est la suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq A \implies |f(x+1) - f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

2. Écrivons la définition pour le choix $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$. On a bien $\varepsilon > 0$ car on a supposé que $\ell > 0$. Il existe donc $A \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq A \implies |f(x+1) - f(x) - \ell| \leq \frac{\ell}{2}$$

Soit $x \in [A, +\infty[$. Alors (par définition de la valeur absolue) :

$$-(f(x+1) - f(x) - \ell) \leq |f(x+1) - f(x) - \ell| \leq \frac{\ell}{2}$$

donc :

$$\ell - f(x+1) + f(x) \leq \frac{\ell}{2} \quad i.e. \quad f(x+1) - f(x) \geq \frac{\ell}{2}$$

Ainsi :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq A \implies f(x+1) - f(x) \geq \frac{\ell}{2}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $A + k - 1 \geq A$ donc, d'après la question précédente appliquée au point $x = A + k - 1$, on a :

$$f(A+k) - f(A+k-1) \geq \frac{\ell}{2}$$

Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(A+k) - f(A+k-1) \geq \frac{\ell}{2}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f(A+k) - f(A+k-1) \geq \frac{\ell}{2}$$

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n (f(A+k) - f(A+k-1)) \geq \sum_{k=1}^n \frac{\ell}{2}$$

La somme de gauche est télescopique ; elle vaut $f(A+n) - f(A)$. Celle de droite vaut $\frac{\ell}{2}n$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(A+n) - f(A) \geq \frac{\ell}{2}n,$$

d'où le résultat en ajoutant $f(A)$ dans chaque membre de l'inégalité.

5. Comme $\frac{\ell}{2} > 0$, on a $\frac{\ell}{2}n + f(A) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison,

$$f(A+n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

ce qui contredit le fait que la fonction f soit bornée sur $\mathbb{R}_+$ (point (i)). On conclut donc que $\ell \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}_+^*$, i.e. :

$$\ell = 0$$

Problème 1.

Partie I : étude rapide

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de cette suite. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence vérifiée par la suite, on obtient $\ell = \frac{\ell^2 + \ell}{2}$. Or :

$$\ell = \frac{\ell^2 + \ell}{2} \iff 2\ell = \ell^2 + \ell \iff \ell(\ell - 1) = 0 \iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1$$

Donc :

si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors sa limite est soit 0, soit 1

2. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ comme somme des fonctions $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et $x \mapsto \frac{x}{2}$ croissantes sur $\mathbb{R}_+$.
Le tableau de variation est le suivant (la limite en $+\infty$ est évidente) :

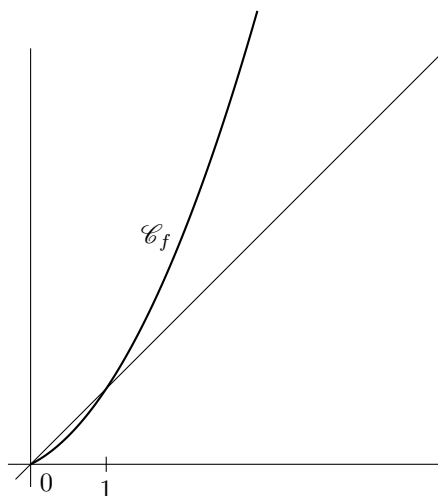
x	0	$+\infty$
f	0	$+\infty$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f(x) - x = \frac{x^2 - x}{2} = \frac{x(x - 1)}{2} \quad (\text{du signe de } x - 1)$$

x	0	1	$+\infty$
$f - \text{Id}_{\mathbb{R}_+}$	-	0	+

3. Représentation graphique des premiers termes de la suite :



Partie II : comportement asymptotique de la suite

4. On utilise une récurrence.

- ★ Par hypothèse, on sait que $u_0 > 1$. On a donc $u_0 \geq 1$ et la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \geq 1$. Alors $u_n^2 \geq 1$ (par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$) puis :

$$\frac{u_n^2 + u_n}{2} \geq \frac{1 + 1}{2} \quad i.e. \quad u_{n+1} \geq 1$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 1}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + u_n}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n}{2} = \frac{u_n(u_n - 1)}{2} \geq 0$$

car $u_n \geq 1$ d'après la question précédente. Donc :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}}$$

6. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, elle est convergente ou admet pour limite $+\infty$ (d'après le théorème de la limite monotone). Si la suite était convergente de limite ℓ , alors sa limite serait 0 ou 1 d'après la question 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq u_0$ (par croissance de la suite) donc $\ell \geq u_0$. Ceci est absurde car $u_0 > 1$ et $\ell \in \{0, 1\}$. On en déduit que :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty}$$

Partie III : étude d'une suite auxiliaire

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(\frac{u_{n+1}}{2} \right) - \frac{1}{2^n} \ln \left(\frac{u_n}{2} \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(\frac{u_n^2 + u_n}{4} \right) - \frac{1}{2^n} \ln \left(\frac{u_n}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(\left(\frac{u_n}{2} \right)^2 \times \left(1 + \frac{1}{u_n} \right) \right) - \frac{1}{2^n} \ln \left(\frac{u_n}{2} \right) \\ &= \underbrace{\frac{2}{2^{n+1}} \ln \left(\frac{u_n}{2} \right)}_{= \frac{1}{2^n}} + \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right) - \frac{1}{2^n} \ln \left(\frac{u_n}{2} \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait d'après la question 4., que $u_n \geq 1$. En particulier, $u_n > 0$, donc $1 + \frac{1}{u_n} \geq 1$.

Comme la fonction $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient $\ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right) \geq 0$ et donc $v_n \leq v_{n+1}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}}$$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $u_n \geq 1$ (question 4.) donc $\frac{1}{u_n} \leq 1$ puis $1 + \frac{1}{u_n} \leq 2$. Par croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right) \leq \ln(2)$. On en déduit de la question 7.(a) que $v_{n+1} - v_n \leq \frac{\ln(2)}{2^{n+1}}$, i.e. :

$$\boxed{v_{n+1} \leq v_n + \frac{\ln(2)}{2^{n+1}}}$$

- (b) On utilise une récurrence.

★ L'inégalité de la question 8.(a), pour $n = 0$, nous donne :

$$v_1 \leq v_0 + \frac{\ln(2)}{2} = v_0 + \ln(2) \sum_{k=1}^1 \frac{1}{2^k}$$

La propriété est donc vraie pour $n = 1$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

$$v_n \leq v_0 + \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$$

Montrons que :

$$v_{n+1} \leq v_0 + \ln(2) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k}$$

En utilisant la question 8.(a) puis l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &\leq v_n + \frac{\ln(2)}{2^{n+1}} \leq v_0 + \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} + \frac{\ln(2)}{2^{n+1}} \\ &= v_0 + \ln(2) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\ &= v_0 + \ln(2) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

en utilisant la relation de Chasles pour les sommes. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq v_0 + \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\frac{1}{2} \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1$$

On déduit donc de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq v_0 + \ln(2)$$

Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $v_0 + \ln(2)$ (remarquons que l'inégalité est évidente pour $n=0$ car $\ln(2) \geq 0$). Comme elle est de plus croissante, on déduit du théorème de la limite monotone que :

$$\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente}}$$

Partie IV : vitesse de divergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, $v_{n+1} - v_n \geq 0$ par croissance de la suite v . Pour la majoration, on utilise l'identité obtenue à la question 7.(a). Comme $u_n \geq 1$, on a $\frac{1}{u_n} \in \mathbb{R}_+$. Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+x) \leq x$$

donc $\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \leq \frac{1}{u_n}$. En multipliant par $\frac{1}{2^{n+1}} \geq 0$, il vient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}u_n}}$$

10. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on sait d'après la question précédente que :

$$0 \leq v_{n+k+1} - v_{n+k} \leq \frac{1}{2^{n+k+1}u_{n+k}} \leq \frac{1}{2^{n+k+1}u_n}$$

car la suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est croissante (comme $n+k \geq n$, on a $u_{n+k} \geq u_n$). On en déduit donc (en sommant les inégalités) que :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{p-1} (v_{n+k+1} - v_{n+k}) \leq \frac{1}{u_n} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^{n+k+1}}$$

La première somme étant télescopique, ces inégalités se réécrivent :

$$0 \leq v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{u_n} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^{n+k+1}}$$

Le changement d'indice $\ell = k + 1$ dans la dernière somme permet alors de conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{u_n} \sum_{\ell=1}^p \frac{1}{2^{n+\ell}}}$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge de limite α donc la suite extraite $(v_{n+p})_{p \in \mathbb{N}}$ également. Ainsi, $\lim_{p \rightarrow +\infty} (v_{n+p} - v_n) = \alpha - v_n$. De plus,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^p \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right)$$

Comme $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^n}$. Ainsi, en faisant tendre p vers $+\infty$ dans les inégalités obtenues à la question 10., on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \alpha - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = \frac{1}{2^n} \ln \left(\frac{u_n}{2} \right)$. Donc $2^n v_n = \ln \left(\frac{u_n}{2} \right)$ puis $\frac{u_n}{2} = e^{2^n v_n}$, soit encore :

$$\boxed{u_n = 2 e^{2^n v_n}}$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\frac{u_n}{2 e^{\alpha 2^n}} = e^{2^n (v_n - \alpha)} = e^{-2^n (\alpha - v_n)}$$

Or d'après la question précédente, on sait que $0 \leq 2^n (\alpha - v_n) \leq \frac{1}{u_n}$. De plus, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$ (puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$). On déduit du théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n (\alpha - v_n) = 0$. D'après la caractérisation séquentielle de la continuité (et par continuité de la fonction exponentielle en 0), on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{2 e^{\alpha 2^n}} = \lim_{X \rightarrow 0} e^X = 1$$

Finalement :

$$\boxed{\frac{u_n}{2 e^{\alpha 2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$$

Problème 2 (études de suites implicites).

Partie A : étude des équations (E_1) et (E_2) sur $[0, +\infty[$

1. ★ Étude de $f_1 : x \mapsto 1 - x e^{-x}$.

La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$f_1'(x) = -e^{-x} + x e^{-x} = (x - 1) e^{-x}$$

On en déduit le tableau de signes de f_1' et de variations de f_1 sur $\mathbb{R}_+$ suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f_1'(x)$		0	
f_1	1	$1 - e^{-1}$	1

La limite de f_1 en $+\infty$ vaut 1 car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$ par croissances comparées.

★ **Étude de $f_2 : x \mapsto 1 - x^2 e^{-x}$.**

La fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$f_2'(x) = -2x e^{-x} + x^2 e^{-x} = x(x-2) e^{-x}$$

On en déduit le tableau de signes de f_2' et de variations de f_2 sur $\mathbb{R}_+$ suivant :

x	0	2	$+\infty$
$f_2'(x)$		0	
f_2	1	$1 - 4e^{-2}$	1

La limite de f_2 en $+\infty$ vaut 1 car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ par croissances comparées.

2. Comme $e > 2$, on a $e^{-1} = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ et donc :

$$1 - e^{-1} > \frac{1}{2} > 0$$

De plus, $e^2 > 4$ donc $4e^{-2} < 1$ d'où :

$$1 - 4e^{-2} > 0$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f_1(x) \geq 1 - e^{-1} > 0$ et $f_2(x) \geq 1 - 4e^{-2} > 0$ d'après les deux questions précédentes. Les fonctions f_1 et f_2 ne s'annulent donc pas sur $\mathbb{R}_+$. Donc :

les équations (E_1) et (E_2) n'admettent pas de solution dans $\mathbb{R}_+$

Partie B : étude de l'équation (E_n) (avec $n \geq 3$) sur $[0, +\infty[$

4. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$f_n'(x) = -nx^{n-1} e^{-x} + x^n e^{-x} = x^{n-1}(x-n) e^{-x}$$

On en déduit le tableau de signes de f_n' et de variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$ suivant :

x	0	n	$+\infty$
$f_n'(x)$		0	
f_n	1	$1 - n^n e^{-n}$	1

La limite de f_n en $+\infty$ vaut 1 car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ par croissances comparées.

5. On sait que $n \geq 3$ et que $e < 3$. Donc $n^n \geq 3^n$ et $e^n < 3^n$ (par croissance stricte de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$) donc $e^{-n} > 3^{-n}$ puis $n^n e^{-n} > 3^n \times 3^{-n}$ (produit de nombres strictement positifs), i.e. $n^n e^{-n} > 1$. On en déduit donc que :

$$1 - n^n e^{-n} < 0$$

6. ★ La fonction f_n est continue sur l'intervalle $[1, n]$ et elle y est strictement décroissante d'après ce qui précède. D'après le théorème de la bijection, la fonction f_n réalise donc une bijection de $[1, n]$ sur l'intervalle $f_n([1, n]) = [f_n(n), f_n(1)]$. Or $f_n(1) = 1 - e^{-1} > 0$ et $f_n(n) < 0$ (question précédente) donc $0 \in f_n([1, n])$. Ainsi, il existe un unique nombre $u_n \in [1, n]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

- ★ Le même raisonnement sur l'intervalle $[n, +\infty[$ conduit à l'existence et à l'unicité d'un nombre réel $v_n \in [n, +\infty[$ tel que $f_n(v_n) = 0$.
 - ★ Sur l'intervalle $[0, 1]$, la fonction f_n est à valeurs strictement positives donc elle ne s'y annule pas.
- Finalement :

l'équation (E_n) admet exactement deux solutions positives u_n et v_n telles que $1 < u_n \leq n \leq v_n$

7. Pour tout entier $n \geq 3$, on a $v_n \geq n$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

Partie C : étude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$

8. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4.

- (a) On a $f_n(u_{n-1}) = 1 - u_{n-1}^n e^{-u_{n-1}}$. Or $f_{n-1}(u_{n-1}) = 0$ donc $u_{n-1}^{n-1} e^{-u_{n-1}} = 1$. Par conséquent,

$$f_n(u_{n-1}) = 1 - u_{n-1} \times u_{n-1}^{n-1} e^{-u_{n-1}} = 1 - u_{n-1}$$

- (b) On sait que $f_n(u_{n-1}) = 1 - u_{n-1}$. Or $u_{n-1} > 1$ d'après la question 6. (puisque $n - 1 \geq 3$) donc :

$$f_n(u_{n-1}) < 0$$

9. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4. On sait que $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(u_{n-1}) < 0$. On en déduit que $f_n(u_{n-1}) \leq f_n(u_n)$. Or la fonction f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $[1, n]$ (qui contient les nombres u_n et u_{n-1} car $u_{n-1} \leq n - 1 \leq n$) donc $u_{n-1} \geq u_n$. On en conclut donc que :

la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante

10. La suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et minorée (par 1) donc, d'après le théorème de la limite monotone,

la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est convergente

11. (a) ★ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Comme u_n est solution de (E_n) , on a $u_n^n = e^{u_n}$. Ainsi :

$$u_n = (e^{u_n})^{1/n} = e^{\frac{u_n}{n}}$$

- ★ Comme la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est convergente, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$ (puisque le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0 est une suite qui tend vers 0). En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, il vient (par continuité de la fonction exponentielle en 0 et d'après la caractérisation séquentielle de la continuité) :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{u_n}{n}} = e^0 = 1$$

- (b) Pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$n(u_n - 1) = \frac{e^{\frac{u_n}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = u_n \frac{e^{\frac{u_n}{n}} - 1}{\frac{u_n}{n}} \quad (\text{licite car } u_n \neq 0)$$

Or on sait que la fonction exponentielle est dérivable en 0 donc :

$$\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \exp'(0) = 1$$

Comme $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a d'après la caractérisation séquentielle de la limite :

$$\frac{e^{\frac{u_n}{n}} - 1}{\frac{u_n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Enfin, on sait que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc, par produit de limites,

$$n(u_n - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$