

DEVOIR SURVEILLÉ 5

durée de l'épreuve : 4h

- La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.
- Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte quatre pages et est composé de deux exercices et de deux problèmes, tous indépendants les uns des autres.

Exercice 1 (étude d'une fonction arithmétique).

Pour tout entier naturel n non nul, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n . Par exemple :

$$\sigma(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

1. Vérifier que $\sigma(6) = 12$ et calculer $\sigma(7)$.
2. Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a $\sigma(n) \geq n + 1$. À quelle condition nécessaire et suffisante cette inégalité est-elle une égalité ?
3. (a) Soient p et q deux nombres premiers distincts et $n = p \times q$. Démontrer que :

$$\sigma(n) = \sigma(p) \times \sigma(q)$$

(b) On considère la proposition suivante :

$$\mathcal{P} : \text{« pour tous } m, n \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \neq n, \text{ on a } \sigma(m \times n) = \sigma(m) \times \sigma(n) \text{ »}$$

La proposition $\mathcal{P}$ est-elle vraie ? Justifier.

4. Pour tout nombre premier p et pour tout entier naturel k , montrer que :

$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

5. Soient p et q deux nombres premiers distincts et k, ℓ deux entiers naturels. On pose $n = p^k q^\ell$.
 - (a) Soit $\delta \in \mathbb{N}^*$. Montrer que δ divise n si et seulement s'il existe $(i, j) \in \llbracket 0, k \rrbracket \times \llbracket 0, \ell \rrbracket$ tel que $\delta = p^i q^j$.
 - (b) En déduire que l'on a l'égalité :

$$\sigma(n) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} \times \frac{q^{\ell+1} - 1}{q - 1}$$

On a donc montré que $\sigma(p^k q^\ell) = \sigma(p^k) \sigma(q^\ell)$.

Remarque (culturelle). Plus généralement, on peut démontrer que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité :

$$\sigma(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sigma(p^{v_p(n)}) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{p^{v_p(n)+1} - 1}{p - 1},$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers

- la fonction σ est *multiplicative*, ce qui signifie que :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*, \quad m \wedge n = 1 \implies \sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$$

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f vérifie les deux conditions suivantes :

- (i) f est bornée sur $\mathbb{R}_+$;
- (ii) il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x+1) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

Le but de cet exercice est de démontrer qu'alors $\ell = 0$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\ell > 0$.

1. Écrire la définition de « $f(x+1) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ ».
2. En choisissant convenablement ε dans la définition écrite à la question précédente, montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq A \implies f(x+1) - f(x) \geq \frac{\ell}{2}$$

3. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(A+k) - f(A+k-1) \geq \frac{\ell}{2}$$

4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(A+n) \geq \frac{\ell}{2}n + f(A)$$

5. Obtenir une contradiction et conclure.

Problème 1 (étude d'une suite récurrente d'ordre 1).

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]1, +\infty[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2}$$

Partie I : étude rapide

1. En cas de convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, préciser quelles sont les limites possibles.
2. On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^2 + x}{2} \end{cases}$. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer le signe de la fonction $f - \text{Id}_{\mathbb{R}_+}$ sur cet ensemble.
3. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie II : comportement asymptotique de la suite

4. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq 1$.
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
6. Conclure que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Partie III : étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{1}{2^n} \ln \left(\frac{u_n}{2} \right)$.

7. (a) Pour tout entier naturel n , montrer que :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$$

(b) En déduire le sens de variation de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

8. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} \leq v_n + \frac{\ln(2)}{2^{n+1}}$$

(b) Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq v_0 + \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$$

(c) Conclure que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, puis qu'elle est convergente.

On notera dans la suite α la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Partie IV : vitesse de divergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

9. En utilisant la partie précédente, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}u_n}$$

10. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{u_n} \sum_{k=1}^p \frac{1}{2^{n+k}}$$

11. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \alpha - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$$

12. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de v_n .

13. Montrer enfin que :

$$\frac{u_n}{2 e^{\alpha 2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Problème 2 (étude de suites implicites).

Pour tout entier naturel n non nul, on se propose d'étudier les solutions de l'équation :

$$x^n = e^x, \quad (E_n)$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la fonction $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{cases} \mathbb{R} \quad 1 - x^n e^{-x}$ de sorte qu'un nombre réel $x \in \mathbb{R}_+$ est solution de (E_n) si et seulement si x annule la fonction f_n .

On pourra utiliser librement le fait que $2 < e < 3$ dans ce problème.

Partie A : étude des équations (E_1) et (E_2) sur $\mathbb{R}_+$

1. Étudier les variations des fonctions f_1 et f_2 sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $1 - e^{-1} > 0$ et $1 - 4e^{-2} > 0$.
3. Étudier l'existence de solutions dans $\mathbb{R}_+$ pour les équations (E_1) et (E_2) .

Dans toute la suite du problème, on suppose que n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Partie B : étude de l'équation (E_n) (pour $n \geq 3$) sur $\mathbb{R}_+$

4. Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$.
5. Justifier que $1 - n^n e^{-n} < 0$.
6. En déduire que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions positives notées u_n et v_n telles que $1 < u_n \leq n \leq v_n$.
7. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$. Justifier.

Partie C : étude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$

8. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4.
 - (a) Montrer que $f_n(u_{n-1}) = 1 - u_{n-1}$.
 - (b) En déduire que $f_n(u_{n-1}) < 0$.
9. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.
10. Justifier que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est convergente.
11. On note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.
 - (a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a l'égalité :

$$u_n = e^{\frac{u_n}{n}}$$

puis en déduire la valeur de ℓ .

- (b) Déterminer la limite de $n(u_n - \ell)$ quand n tend vers $+\infty$.

– FIN DE L'ÉPREUVE –