Devoir Surveillé 4

un corrigé

Exercice (calcul de l'intégrale de Poisson).

1. A l'aide de la relation de Chasles,

$$\int_0^{2\pi} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} g(t)\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} g(t)\mathrm{d}t$$

A l'aide du changement de variable $u = 2\pi - t$,

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi} g(t)\mathrm{d}t &= -\int_{\pi}^{0} g(2\pi - u)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\pi} g(2\pi - t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} g(-t)\mathrm{d}t \quad \text{car } g \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\ &= \int_0^{\pi} g(t)\mathrm{d}t \quad \text{car } g \text{ est paire}\end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. Soient $r \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Remarquons que :

$$\begin{aligned}f_r(\theta) &= \left(r - e^{i\theta}\right)\left(r - e^{-i\theta}\right) \\ &= \left(r - e^{i\theta}\right)\overline{\left(r - e^{i\theta}\right)} \quad \text{car } r \in \mathbb{R} \\ &= \left|r - e^{i\theta}\right|^2 \geq 0\end{aligned}$$

Supposons que $f_r(\theta) = 0$, alors $r = e^{i\theta}$, puis $|r| = \left|e^{i\theta}\right| = 1$ et donc, comme $r \in \mathbb{R}, r = \pm 1$, ce qui est exclu. Ainsi

$$\forall r \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\},\ \forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad f_r(\theta) > 0$$

3. Soit $r \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. On effectue le changement de variable $x = \pi - \theta$. Ainsi

$$\mathrm{I}(r) = -\int_{\pi}^{0} \ln(f_r(\pi - x))\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \ln(r^2 + 2r\cos(\theta) + 1)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \ln(f_{-r}(x))\mathrm{d}x = \mathrm{I}(-r)$$

car pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f_r(\pi - \theta) = r^2 - 2r\cos(\pi - \theta) + 1 = r^2 + 2r\cos\theta + 1 = f_{-r}(\theta)$$

4. Soit $r \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. Comme indiqué :

$$\begin{aligned}2\mathrm{I}(r) &= \mathrm{I}(r) + \mathrm{I}(-r) \\ &= \int_0^{\pi} \ln(f_r(\theta))\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi} \ln(f_{-r}(\theta))\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi} \ln\left(f_r(\theta)f_{-r}(\theta)\right)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Or, comme vu plus haut, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f_r(\theta) = \left|r - e^{i\theta}\right|^2 \qquad \text{et} \qquad f_{-r}(\theta) = \left|-r - e^{i\theta}\right|^2 = \left|r + e^{i\theta}\right|^2$$

de sorte que

$$f_r(\theta)f_{-r}(\theta) = \left|r - e^{i\theta}\right|^2\left|r + e^{i\theta}\right|^2 = \left|(r - e^{i\theta})(r + e^{i\theta}\right|^2 = \left|r^2 - e^{2i\theta}\right|^2 = f_{r^2}(2\theta)$$

Finalement :

$$2\mathrm{I}(r) = \int_0^{\pi} \ln(f_{r^2}(2\theta))\mathrm{d}\theta$$

En effectuant le changement de variable $x = 2\theta$, on obtient :

$$2\mathrm{I}(r) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln(f_{r^2}(x))\mathrm{d}x$$

Or $\ln \circ f_{r^2}$ est clairement 2π-périodique et paire donc, d'après la question 1.,

$$2\mathrm{I}(r) = \int_0^{\pi} \ln(f_{r^2}(\theta))\mathrm{d}\theta = \mathrm{I}\left(r^2\right)$$

5. On fixe $r \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ et on procède à une récurrence. Tout d'abord, $2^0\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}\left(r^1\right) = \mathrm{I}\left(r^{2^0}\right)$. Supposons alors qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}\left(r^{2^n}\right)$. D'après la question 4.,

$$2^{n+1}\mathrm{I}(r) = 2\mathrm{I}\left(r^{2^n}\right) = \mathrm{I}\left(\left(2^{2^n}\right)^2\right) = \mathrm{I}\left(r^{2^{n+1}}\right)$$

Par principe de récurrence simple :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 2^n\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}\left(r^{2^n}\right)$$

6. Remarquons déjà que puisque $\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(-r), \mathrm{I}(r) = \mathrm{I}(|r|)$.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos\theta \leq 1$ donc

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, |r|^2 - 2|r| + 1 \leq |r|^2 - 2|r|\cos\theta + 1 \leq |r|^2 + 2|r| + 1$$

ou encore

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, (1 - |r|)^2 \leq f_{|r|}(\theta) \leq (1 + |r|)^2$$

donc

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, 2\ln(1 - |r|) \leq \ln(f_{|r|}(\theta)) \leq 2\ln(1 + |r|)$$

puis, par croissance de l'intégrale,

$$2\pi\ln(1 - |r|) \leq \mathrm{I}(|r|) \leq 2\pi\ln(1 + |r|)$$

Donc, d'après notre remarque initiale

$$2\pi\ln(1 - |r|) \leq \mathrm{I}(r) \leq 2\pi\ln(1 + |r|)$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $|r| < 1$, on a également $|r|^{2^n} < 1$: on peut donc appliquer la question 6 de sorte que

$$2\pi\ln\left(1 - \left|r^{2^n}\right|\right) \leq \mathrm{I}\left(r^{2^n}\right) \leq 2\pi\ln\left(1 + \left|r^{2^n}\right|\right)$$

ou encore

$$2\pi\ln\left(1 - |r|^{2^n}\right) \leq \mathrm{I}\left(r^{2^n}\right) \leq 2\pi\ln\left(1 + |r|^{2^n}\right)$$

Finalement,

$$\frac{\pi}{2^{n-1}}\ln\left(1 - |r|^{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}\mathrm{I}\left(r^{2^n}\right) \leq \frac{\pi}{2^{n-1}}\ln\left(1 + |r|^{2^n}\right)$$

D'après la question 5 on a donc

$$\frac{\pi}{2^{n-1}}\ln\left(1 - |r|^{2^n}\right) \leq \mathrm{I}(r) \leq \frac{\pi}{2^{n-1}}\ln\left(1 + |r|^{2^n}\right)$$

Comme $|r| < 1, \lim_{n\to+\infty} |r|^{2^n} = 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 - |r|^{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + |r|^{2^n}\right) = 0$$

De plus, $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - |r|^{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + |r|^{2^n}\right) = 0$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\mathrm{I}(r) = 0$.

8. Soit $r \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f_{1/r}(\theta) = \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r}\cos\theta + 1 = \frac{1}{r^2}\left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right) = \frac{1}{r^2} f_r(\theta)$$

Ainsi

$$\mathrm{I}\left(\frac{1}{r}\right) = \int_0^{\pi} \ln(f_{1/r}(\theta))\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \ln\left(\frac{1}{r^2} f_r(\theta)\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \left(\ln(f_r(\theta)) - 2\ln(|r|)\right)\mathrm{d}\theta = \mathrm{I}(r) - 2\pi\ln(|r|)$$

9. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $|r| > 1$. Alors $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$. D'après la question 7., on a $\mathrm{I}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$. Ainsi

$$\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}\left(\frac{1}{r}\right) + 2\pi\ln(|r|) = 2\pi\ln(|r|)$$

Problème 1 (résolution d'une équation fonctionnelle).

Partie I – Quelques exemples

1. (a) En tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$, la fonction f_λ est dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$, on a :

$$f_\lambda'(x) = \frac{1}{x}\sqrt{x} + (\lambda + \ln(x))\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2 + \lambda + \ln(x)}{2\sqrt{x}}$$

Soit $x > 0$. On a :

$$f_\lambda'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2 + \lambda + \ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant -2 - \lambda \Leftrightarrow x \geqslant e^{-2-\lambda}$$

On a par ailleurs $\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} f_\lambda(x) = 0$ (croissances comparées).

x	0		$e^{-2-\lambda}$		$+\infty$
$f_\lambda'(x)$		$-$	0	$+$	
f_λ	0	$\searrow$	$\frac{-2}{e^{1+\frac{\lambda}{2}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Une équation cartésienne T_λ est donnée par

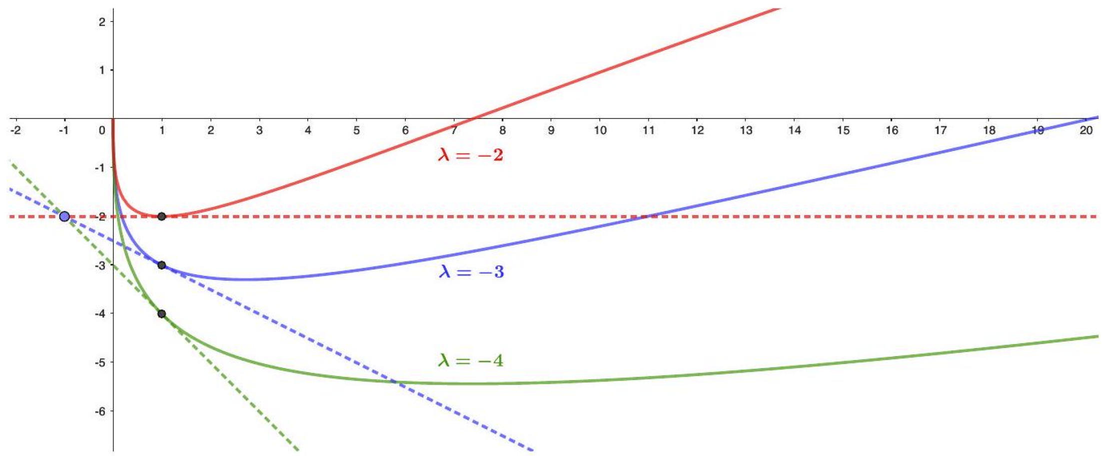
$$y = f_\lambda'(1)(x-1) + f_\lambda(1) = \frac{2+\lambda}{2}(x-1) + \lambda = \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)x + \frac{\lambda}{2} - 1$$

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que :

$$-2 = \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)(-1) + \frac{\lambda}{2} - 1$$

La droite T_λ passe par le point de coordonnées $(-1, -2)$. Ce point étant indépendant de λ, les droites T_λ sont concourantes.

(d) On prendra garde au fait que si $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ alors $f_{\lambda_1} \leqslant f_{\lambda_2}$.



2. (a) Les solutions de l'équation homogène $y' - \frac{1}{2x}y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \alpha e^{\frac{1}{2}\ln x} = \alpha\sqrt{x}$. On recherche une solution particulière de la forme $f_p : x \mapsto \alpha(x)\sqrt{x}$ où $\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable à déterminer.

$$\begin{aligned} f_p \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad f_p'(x) - \frac{1}{2x}f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad \alpha'(x)\sqrt{x} + \frac{\alpha(x)}{2\sqrt{x}} - \frac{\alpha(x)\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad \alpha'(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Le choix $\alpha(x) = \ln x$ convient ce qui donne $f_p(x) = \sqrt{x}\ln x$.
Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\alpha + \ln x)\sqrt{x}$ avec α qui décrit $\mathbb{R}$.

(b) Grâce à la question précédente, on sait qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = (\alpha + \ln x)\sqrt{x}$. La condition $y(1) = \lambda$ donne $\alpha = \lambda$ puis $y(x) = (\lambda + \ln x)\sqrt{x} = f_\lambda(x)$.

La fonction f_λ étudiée dans cette partie est l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ y(1) = \lambda \end{cases}$

3. Soit $x > 0$. On a :

$$f_\lambda'(x) = \frac{2 + \lambda + \ln x}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}(-2 - \lambda - \ln x)\frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}\left(-2 - \lambda + \ln\frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{1}{x}}$$

Si $-2 - \lambda = \lambda$ alors $f_\lambda'(x) = \frac{-1}{2}f_\lambda\left(\frac{1}{x}\right)$. Autrement dit, pour $\lambda = -1$, la fonction f_λ une solution de ($\star$) pour $k = -\frac{1}{2}$.

Partie II – Résolution dans le cas $k = -\dfrac{1}{2}$

4. (a) La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que composée, produit et somme de fonctions dérivables. Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{f(x)}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\sqrt{x}}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{f(x)}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}}f(x) \qquad \text{car } f \text{ vérifie } (\star) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction g est constante.

(b) On a $g(1) = 2f(1)$ donc, pour tout $x > 0$, on a $g(x) = 2f(1)$ que l'on réécrit

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}f\left(\frac{1}{x}\right) = 2f(1) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}f'(x) = 2f(1)$$

puis $f'(x) - \frac{1}{2x}f(x) = \frac{-f(1)}{\sqrt{x}}$.

5. Si $f(1)=0$ alors f est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'-\frac{1}{2x}y=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$. La fonction nulle étant également solution de ce même problème, par unicité de la solution à un problème de Cauchy, la fonction f est la fonction nulle.
6. On suppose $f(1)\neq 0$. En notant $h : x \mapsto -\frac{f(x)}{f(1)}$, on a $h(1)=-1$ et h est solution de $y'-\frac{1}{2x}y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ d'après la question 4.(b). On a vu dans la partie 1 que l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'-\frac{1}{2x}y=\frac{1}{\sqrt{x}} \\ y(1)=-1 \end{cases}$ est la fonction $f_{-1} : x \mapsto (-1+\ln x)\sqrt{x}$. Par unicité de la solution de ce problème de Cauchy, on a $h=f_{-1}$, ie $f=-f(1)f_{-1}$ et f est de la forme $f=cf_{-1}$ avec $c\in\mathbb{R}$.
Réciproquement, puisque f_{-1} est solution de $(\star)$ pour $k=-\frac{1}{2}$ (voir partie 1), les fonctions de la forme cf_{-1} avec $c\in\mathbb{R}$ sont également solutions de $(\star)$ pour $k=-\frac{1}{2}$.
Par conséquent, les solutions de $(\star)$ pour $k=-\frac{1}{2}$ sont les fonctions de la forme
$$x \mapsto c(-1+\ln x)\sqrt{x} \text{ avec } c\in\mathbb{R}$$

Partie III – Résolution dans le cas $k \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$

7. On a $y : x\mapsto x^\alpha$ qui est solution de (E_k) si et seulement si
$$\forall x>0, \quad \alpha(\alpha-1)x^\alpha + k^2x^\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha-1)+k^2=0 \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha+k^2=0.$$
Puisque le discriminant $\Delta = 1-4k^2>0$ ($k^2<\frac{1}{4}$ par hypothèse), on peut choisir :
$$\alpha = \frac{1+\sqrt{1-4k^2}}{2} > \frac{1}{2}$$
8. Pour tout $x>0$, on a :
$$y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}z(x) + x^\alpha z'(x)$$
et :
$$y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}z(x) + 2\alpha x^{\alpha-1}z'(x) + x^\alpha z''(x)$$
donc :
$$\begin{aligned} &y \text{ est solution de } (E_k) \Leftrightarrow \forall x>0, \quad x^2y''(x)+k^2y(x)=0 \\ \Leftrightarrow &\forall x>0, \quad \alpha(\alpha-1)x^\alpha z(x) + 2\alpha x^{\alpha+1}z'(x) + x^{\alpha+2}z''(x) + k^2x^\alpha z(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &\forall x>0, \quad \underbrace{(\alpha(\alpha-1)+k^2)}_{=0}z(x) + 2\alpha x z'(x) + x^2 z''(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &\forall x>0, \quad z''(x) + \frac{2\alpha}{x}z'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &z' \text{ est solution de } Y' + \frac{2\alpha}{x}Z = 0 \end{aligned}$$
9. Les solutions de $(E_k') : Y' + \frac{2\alpha}{x}Y = 0$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto ce^{-2\alpha\ln x} = cx^{-2\alpha}$.
10. En utilisant les résultats des questions précédentes, on peut écrire :
$$\begin{aligned} &y \text{ est solution de } (E_k) \Leftrightarrow z' \text{ est solution de } Y' + \frac{2\alpha}{x}Z = 0 \Leftrightarrow \exists c\in\mathbb{R}, \forall x>0, \quad z'(x) = cx^{-2\alpha} \\ &\Leftrightarrow \exists (a,c)\in\mathbb{R}^2, \forall x>0, \quad z(x) = \frac{c}{1-2\alpha}x^{1-2\alpha} + a \quad \left(\alpha\neq\frac{1}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2, \forall x>0, \quad z(x) = bx^{1-2\alpha} + a \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2, \forall x>0, \quad y(x) = x^\alpha z(x) = ax^\alpha + bx^{1-\alpha} \end{aligned}$$
11. Soit f solution de $(\star)$ avec $k\in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$.
Pour tout $x>0$, on a $f'(x) = kf\left(\frac{1}{x}\right)$ donc f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que composée de fonctions dérivables. Pour tout $x>0$, on a
$$f''(x) = -\frac{k}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{k^2}{x^2}f\left(\frac{1}{1/x}\right) = -\frac{k^2}{x^2}f(x).$$
Par conséquent, si f convient alors f est solution de l'équation (E_k) donc est de la forme $x\longmapsto f(x) = ax^\alpha + bx^{1-\alpha}$. On regarde à quelle(s) condition(s) une fonction de cette forme est effectivement solution de

($\star$).
La condition $f'(x) = kf\left(\frac{1}{x}\right)$ se réécrit

$$a\alpha x^{\alpha-1} + b(1-\alpha)x^{-\alpha} = k\left(a\frac{1}{x^{\alpha}} + b\frac{1}{x^{1-\alpha}}\right) = kax^{-\alpha} + kbx^{\alpha-1}$$

Cette relation étant valable pour tout $x > 0$, ceci est vrai si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} a\alpha = kb \\ b(1-\alpha) = ka \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow a = \frac{kb}{\alpha} \quad \text{car } k^2 + \alpha(\alpha-1) = 0.$$

Par conséquent, les solutions de $(\star)$ pour $k \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto b\left(\frac{k}{\alpha}x^{\alpha} + x^{1-\alpha}\right)$, ie de la forme

$$x \mapsto c\left(kx^{\alpha} + \alpha x^{1-\alpha}\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Problème 2 (autour de l'équation de Pell-Fermat).

Partie I – Préliminaires hyperboliques

1. (a) La fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (en effet, $\text{sh}' = \text{ch} > 0$ sur $\mathbb{R}$) donc, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\text{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
   (b) Il suffit de l'écrire ; on utilise le fait que $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) On traite séparément l'injectivité et la surjectivité.
   — Soient $s, t \in \mathbb{R}$. Si $M(t) = M(s)$, alors $\left(\text{ch}(s), \frac{\text{sh}(s)}{\sqrt{2}}\right) = \left(\text{ch}(t), \frac{\text{sh}(t)}{\sqrt{2}}\right)$, d'où l'on tire que $\text{sh}(s) = \text{sh}(t)$. Or la fonction sh est injective (car bijective) donc $s = t$. Ainsi, M est injective.
   — Soit $(x, y) \in \mathcal{H}_0$. Comme $\text{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective et que $y\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\text{sh}(t) = y\sqrt{2}$. On a alors :

   $$M(t) = \left(\text{ch}(t), \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sh}(t)\right) = (\text{ch}(t), y)$$

   Comme $(x, y) \in \mathcal{H}_0$, on a :

   $$x^2 = 1 + 2y^2 = 1 + \text{sh}(t)^2 = \text{ch}(t)^2$$

   Comme $x, \text{ch}(t) \in \mathbb{R}_+$, on a $x = \text{ch}(t)$ et donc $M(t) = (x, y)$. Ainsi, M est surjective.
   Finalement, M est bijective.
2. (a) Il suffit de l'écrire.
   (b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq \pm b$. Alors $\text{ch}(b) - \text{ch}(a) \neq 0$ et $\text{ch}(a+b) - 1 \neq 0$; les deux nombres proposés sont donc bien définis. En posant $u = \frac{a+b}{2}$ et $v = \frac{b-a}{2}$, on a $u + v = b$ et $u - v = a$ donc, d'après la question précédente :

   $$\frac{\text{sh}(b) - \text{sh}(a)}{\text{ch}(b) - \text{ch}(a)} = \frac{\text{sh}(u+v) - \text{sh}(u-v)}{\text{ch}(u+v) - \text{ch}(u-v)} = \frac{\text{ch}(u)}{\text{sh}(u)} = \frac{1}{\text{th}(u)}$$

   et :

   $$\begin{aligned} \frac{\text{sh}(a+b)}{\text{ch}(a+b) - 1} = \frac{\text{sh}(2u)}{\text{ch}(2u) - 1} = \frac{2\,\text{ch}(u)\,\text{sh}(u)}{\text{ch}(u)^2 + \text{sh}(u)^2 - 1} &= \frac{2\,\text{ch}(u)\,\text{sh}(u)}{2\,\text{sh}(u)^2} \\ &= \frac{\text{ch}(u)}{\text{sh}(u)} \\ &= \frac{1}{\text{th}(u)}, \end{aligned}$$

   d'où l'égalité annoncée.

Partie II – Transport de structure

3. Immédiat en utilisant la propriété vérifiée par f (et la définition de e_G).

4. On montre que $H = f(G)$ (f est surjective) est un groupe en vérifiant les axiomes définissant un groupe (non vide, $*$ est une loi de composition interne sur H d'après l'énoncé, associativité, élément neutre et inversibilité dans H de tous les éléments de H).
5. Voir figure en dernière page.
6. On distingue deux cas.
   — On suppose que $a \neq -b$ de telle sorte que B n'est pas le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses. Dans ce cas, la droite (AB) n'est pas perpendiculaire à l'axe des abscisses. On note t le paramètre associé à $C = M(t) \in \mathcal{H}_0$. Les coordonnées des points A, B, Ω et C sont :
   $$(x_A, y_A) = M(a), \qquad (x_B, y_B) = M(b), \qquad (x_\Omega, y_\Omega) = (1, 0) \qquad \text{et} \qquad (x_C, y_C) = M(t)$$
   Les droites $\Delta = (AB)$ et (ΩC) sont parallèles donc :
   $$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_\Omega}{x_C - x_\Omega} \qquad i.e. \qquad \frac{\mathrm{sh}(b) - \mathrm{sh}(a)}{\mathrm{ch}(b) - \mathrm{ch}(a)} = \frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t) - 1},$$
   soit encore $\dfrac{\mathrm{sh}(a+b)}{\mathrm{ch}(a+b) - 1} = \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t) - 1}$. Par unicité du paramètre associé au point C, il vient $t = a+b$, *i.e.* $C = M(a+b)$.
   — Si $a = -b$, alors B est le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses. La droite (AB) est perpendiculaire à l'axe des abscisses donc :
   $$A * B = \Omega = M(0) = M(a+b)$$
   Dans tous les cas, on a bien $A * B = \Omega = M(a+b)$.
7. La fonction $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}_0$ est surjective (partie I) et $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe et $*$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{H}_0$ par construction. Par ailleurs, on sait d'après la question précédente que :
   $$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad M(a+b) = M(a) * M(b)$$
   Le théorème de transport de structure démontré aux questions 3. et 4. permet de conclure que $(\mathcal{H}_0, *)$ est un groupe.

Partie III – Équation de Pell-Fermat

8. L'égalité $A = M(t_0)$ se réécrit $(3, 2) = \left(\mathrm{ch}(t_0), \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{sh}(t_0)\right)$. En utilisant les expressions des fonctions ch et sh et en résolvant le système, on obtient les deux égalités annoncées.
9. Soit $M = (x, y) \in \mathcal{H}_0$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $M = M(t)$. On sait aussi que $A = M(t_0)$ *i.e.* $(3, 2) = \left(\mathrm{ch}(t_0), \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{sh}(t_0)\right)$ et, d'après la partie précédente :
   $$A * M = M(t_0) * M(t) = M(t_0 + t)$$
   Les coodonnées de $A * M$ sont donc :
   $$\begin{aligned}\left(\mathrm{ch}(t_0 + t), \frac{\mathrm{sh}(t_0 + t)}{\sqrt{2}}\right) &= \left(\mathrm{ch}(t_0)\,\mathrm{ch}(t) + \mathrm{sh}(t_0)\,\mathrm{sh}(t), \mathrm{ch}(t_0)\frac{\mathrm{sh}(t)}{\sqrt{2}} + \mathrm{ch}(t)\frac{\mathrm{sh}(t_0)}{\sqrt{2}}\right) \\ &= (3x + 4y, 3y + 2x)\end{aligned}$$
10. (a) On procède par récurrence.
    — Pour $n = 0$, on a $A_0 = \Omega \in \mathcal{H}_0$ et les coordonnées de A_0, à savoir $(0, 1)$, sont entières.
    — Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A_n \in \mathcal{H}_0$ et que les coordonnées de A_n, notées (x, y), sont entières. On a $A_{n+1} = F(A_n) = A * A_n$. Or $A, A_n \in \mathcal{H}_0$ et $*$ est une loi de composition interne sur $\mathscr{H}_0$ donc $A_{n+1} \in \mathcal{H}_0$. Les coordonnées de A_{n+1}, obtenues à la question précédentes, sont effectivement entières.

    (b) C'est une récurrence immédiate.

    (c) Le résultat découle immédiatement des questions 8. et 10.(b).

11. Il s'agit de trouver deux entiers k et m tels que :

$$\text{nombre de coins coins} = \underbrace{k^2}_{\text{config. 1}} = \underbrace{\frac{m(m+1)}{2}}_{\text{config. 2}}$$

On a :

$$k^2 = \frac{m(m+1)}{2} \iff m(m+1) - 2k^2 = 0 \iff \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - 2k^2 = \frac{1}{4}$$
$$\iff (2m+1)^2 - 2(2k)^2 = 1$$
$$\iff (2m+1, 2k) \in \mathcal{H}_0$$

La relation de récurrence vérifiée par la suite nous donne $A_0 = \Omega = (1, 0)$,

$$A_1 = A = (3, 2), \qquad A_2 = (17, 12), \qquad A_3 = (99, 70), \qquad A_4 = (577, 408)$$

Les valeurs de k associées sont respectivement 0, 1, 6, 35 et 204. Le nombre possible de canards associé, égal à k^2, est alors $0^2 = 1$, $1^2 = 1$, $6^2 = 36$ (*cf.* illustration), $35^2 = 1225$, $204^2 > 200^2 = 40000$. Sachant que ce nombre est compris entre 1000 et 10000, le groupe de canards est constitué de 1225 individus.