Devoir Surveillé 4

durée de l'épreuve : 4h

- *La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir.*
- *Les résultats non encadrés à la* ***règle*** *ne seront pas pris en compte dans la notation.*
- *La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants.

Exercice 1 (calcul intégral).

1. Soit g une fonction paire, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} g(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} g(t)\mathrm{d}t$$

Indication : écrire que $\displaystyle\int_0^{2\pi} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}$ et utiliser un changement de variable affine décroissant.

2. On pose pour tous $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f_r(\theta) = r^2 - 2r\cos(\theta) + 1$$

Montrer que :

$$\forall r \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\},\ \forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad f_r(\theta) > 0$$

3. Pour tout $r \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, on pose :

$$\mathrm{I}(r) = \int_0^{\pi} \ln\left(f_r(\theta)\right)\mathrm{d}\theta$$

En posant $x = \pi - \theta$, montrer que :

$$\forall r \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}, \qquad \mathrm{I}(-r) = \mathrm{I}(r)$$

4. En déduire que :

$$\forall r \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}, \qquad 2\,\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}\left(r^2\right)$$

5. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}, \qquad 2^n\,\mathrm{I}(r) = \mathrm{I}\left(r^{2^n}\right)$$

6. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $|r| < 1$. Montrer que :

$$2\pi \ln(1 - |r|) \leqslant \mathrm{I}(r) \leqslant 2\pi \ln(1 + |r|)$$

7. En déduire que $\mathrm{I}(r) = 0$ lorsque $|r| < 1$.
8. Montrer également que :

$$\forall r \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}, \qquad \mathrm{I}\left(\frac{1}{r}\right) = \mathrm{I}(r) - 2\pi \ln(|r|)$$

9. En déduire la valeur de $\mathrm{I}(r)$ lorsque $|r| > 1$.

Problème 1 (résolution d'une équation fonctionnelle).

Soit $k \in \mathbb{R}$. On dira qu'une fonction $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est solution de $(\star)$ si f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et si :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad f'(x) = kf\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (\star)$$

Partie I – Quelques exemples

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre fixé. On note f_λ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f_\lambda : x \longmapsto (\lambda + \ln(x))\sqrt{x}$.

1. (a) Étudier les variations de f_λ sur $]0, +\infty[$. On dressera son tableau de variations.
   (b) Donner une équation cartésienne de la tangente T_λ à la courbe représentative de f_λ en le point d'abscisse 1.
   (c) Montrer que les droites T_λ passent toutes par un même point indépendant de λ. *On dit qu'elles sont concourantes.*
   (d) Sur un même graphique, tracer la courbe représentative de f_λ pour $\lambda = -2, \lambda = -3$ et $\lambda = -4$.
   On donne $e^2 \approx 7,39$ et $\sqrt{e} \approx 1,65$.
2. On note (E) l'équation différentielle :

$$y' - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

   dont on cherche les solutions sur $]0, +\infty[$.
   (a) Résoudre l'équation différentielle (E).
   (b) Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y' - \dfrac{1}{2x}y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ y(1) = \lambda \end{cases}$.
3. Montrer que l'on peut choisir λ de telle sorte que f_λ soit une solution de $(\star)$. On précisera la valeur du réel k associé.

Partie II – Résolution dans le cas $k = -\dfrac{1}{2}$

Dans cette partie, on suppose que f est une solution de $(\star)$ dans le cas où $k = -\dfrac{1}{2}$.

4. On note g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (a) Montrer que g est une fonction constante.

(b) En déduire que :

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) - \frac{1}{2x} f(x) = \frac{-f(1)}{\sqrt{x}}$$

Pour la résolution de deux questions suivantes, il est attendu des raisonnements sans résolution explicite d'équations différentielles.

5. Montrer que si $f(1) = 0$ alors f est la fonction nulle.
6. On suppose $f(1) \neq 0$. À l'aide des résultats de la partie I, déterminer une expression de f.

Partie III – Résolution dans le cas $k \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

Soit k un réel tel que $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$. On note (E_k) l'équation différentielle suivante dont on cherche les solutions définies sur $]0, +\infty[$:

$$x^2 y'' + k^2 y = 0 \qquad (E_k)$$

7. Déterminer un réel $\alpha > \frac{1}{2}$ tel que $y : x \longmapsto x^\alpha$ soit solution de (E_k) sur $]0, +\infty[$.
Dans la suite, α désigne ce nombre.
8. Soit $y :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. On note $z : x \longmapsto \dfrac{y(x)}{x^\alpha}$ de telle sorte que, pour tout $x > 0$, on ait $y(x) = x^\alpha z(x)$. Montrer que y est solution de (E_k) si et seulement si z' est solution d'une équation différentielle linéaire (E'_k) d'ordre 1 à déterminer.
9. Résoudre (E'_k).
10. En déduire que l'ensemble des solutions de (E_k) est l'ensemble des fonctions définies sur $]0, +\infty[$ de la forme $x \longmapsto a x^\alpha + b x^{1-\alpha}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
11. Déterminer les solutions de $(\star)$ dans le cas $k \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

Problème 2 (autour de l'équation de Pell-Fermat).

Dans ce problème, le plan euclidien est identifié à $\mathbb{R}^2$ par choix d'un repère orthonormé. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) dans ce repère vérifient :

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

On note $\mathcal{H}_0$ les points de $\mathcal{H}$ dont l'abscisse est positive. Cet ensemble $\mathcal{H}$ est représenté en annexe.

Partie I – Préliminaires hyperboliques

1. (a) Justifier que la fonction $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective.
   (b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ de coordonnées $\left(\operatorname{ch}(t), \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sh}(t)\right)$ appartient à $\mathcal{H}_0$.
   Dans toute la suite, on identifie le point $M(t)$ et ses coordonnées dans le repère considéré.
   (c) Prouver que la fonction $M : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}_0 \\ t \longmapsto M(t) = \left(\operatorname{ch}(t), \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sh}(t)\right) \end{cases}$ est bijective.
2. (a) Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Établir les relations :

$$\operatorname{sh}(u+v) = \operatorname{ch}(u)\operatorname{sh}(v) + \operatorname{sh}(u)\operatorname{ch}(v) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(u+v) - \operatorname{sh}(u-v) = 2\operatorname{ch}(u)\operatorname{sh}(v)$$

On montrerait de la même manière les deux relations ci-après que l'on admettra sans démonstration :

$$\operatorname{ch}(u+v) = \operatorname{ch}(u)\operatorname{ch}(v) + \operatorname{sh}(u)\operatorname{sh}(v) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(u+v) - \operatorname{ch}(u-v) = 2\operatorname{sh}(u)\operatorname{sh}(v)$$

(b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq \pm b$. Montrer que $\dfrac{\mathrm{sh}(b)-\mathrm{sh}(a)}{\mathrm{ch}(b)-\mathrm{ch}(a)} = \dfrac{\mathrm{sh}(a+b)}{\mathrm{ch}(a+b)-1}$.

Partie II – Transport de structure

Soit $(G,\bullet)$ un groupe dont on note e_G l'élément neutre et soit H un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$. On suppose qu'il existe une fonction $f : G \longrightarrow H$ surjective telle que :

$$\forall (x,y) \in G^2, \qquad f(x \bullet y) = f(x) * f(y)$$

3. Montrer que $f(e_G)$ est l'élément neutre de H pour $*$.
4. Montrer que $(H,*)$ est un groupe.

Étant donnés deux points A et B de $\mathcal{H}_0$, on note Δ la droite définie par :

— Δ est la droite (AB) si $A \neq B$,

— Δ est la tangente à $\mathcal{H}_0$ en A si $A = B$.

Si Δ n'est pas perpendiculaire à l'axe des abscisses, la parallèle à Δ passant par $\Omega = M(0) = (1,0) \in \mathcal{H}_0$ coupe $\mathcal{H}_0$ en un autre point C différent de Ω. On note alors $C = A * B$. Si Δ est perpendiculaire à l'axe des abscisses, on pose $A * B = \Omega$.

5. Sur la courbe $\mathcal{H}_0$ en dernière page (et à rendre avec la copie), placer les points $\Omega, A(3,2), B(17,-12)$, ainsi que les points $A * B$ et $A * A$.
6. Montrer que si $A = M(a)$ et $B = M(b)$ avec $A \neq B$ alors $C = M(a+b)$. On admet que ce résultat est encore valable dans le cas $A = B$.
7. Montrer que $(\mathcal{H}_0,*)$ est un groupe.

Partie III – Équation de Pell-Fermat

On note A le point de coordonnées $(3,2)$ dont on peut vérifier que c'est un point de $\mathcal{H}_0$. On note également t_0 le réel tel que $A = M(t_0)$.

8. Montrer que $e^{t_0} = 3 + 2\sqrt{2}$ et $e^{-t_0} = 3 - 2\sqrt{2}$.
9. Montrer que la fonction $F : M \longmapsto A * M$ de $\mathcal{H}_0$ dans $\mathcal{H}_0$ envoie le point M de coordonnées (x,y) sur le point de coordonnées $(3x+4y, 2x+3y)$.

On définit la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $A_0 = \Omega$ et la relation de récurrence $A_{n+1} = F(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10. (a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points à coordonnées entières tous situés sur $\mathcal{H}_0$.

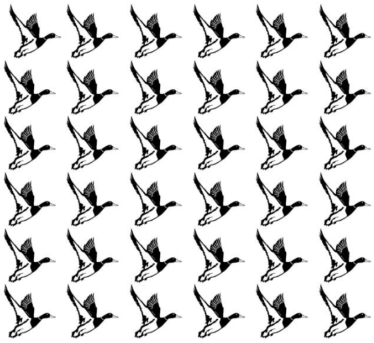
    (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_n = M(nt_0)$.

    (c) En déduire que les points A_n sont ceux de coordonnées :

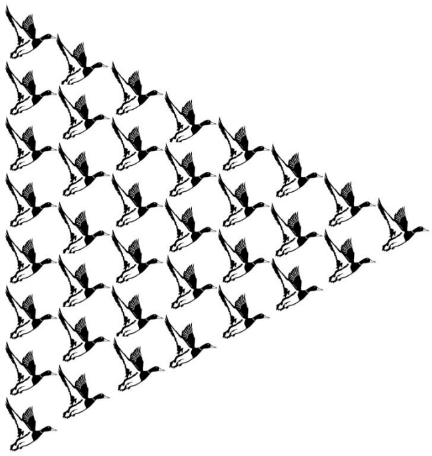
$$\left(\frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2}, \frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}\right)$$

On peut montrer que les points A_n ($n \in \mathbb{N}$) sont les seuls points du plan à coordonnées entières positives situés sur $\mathcal{H}_0$.

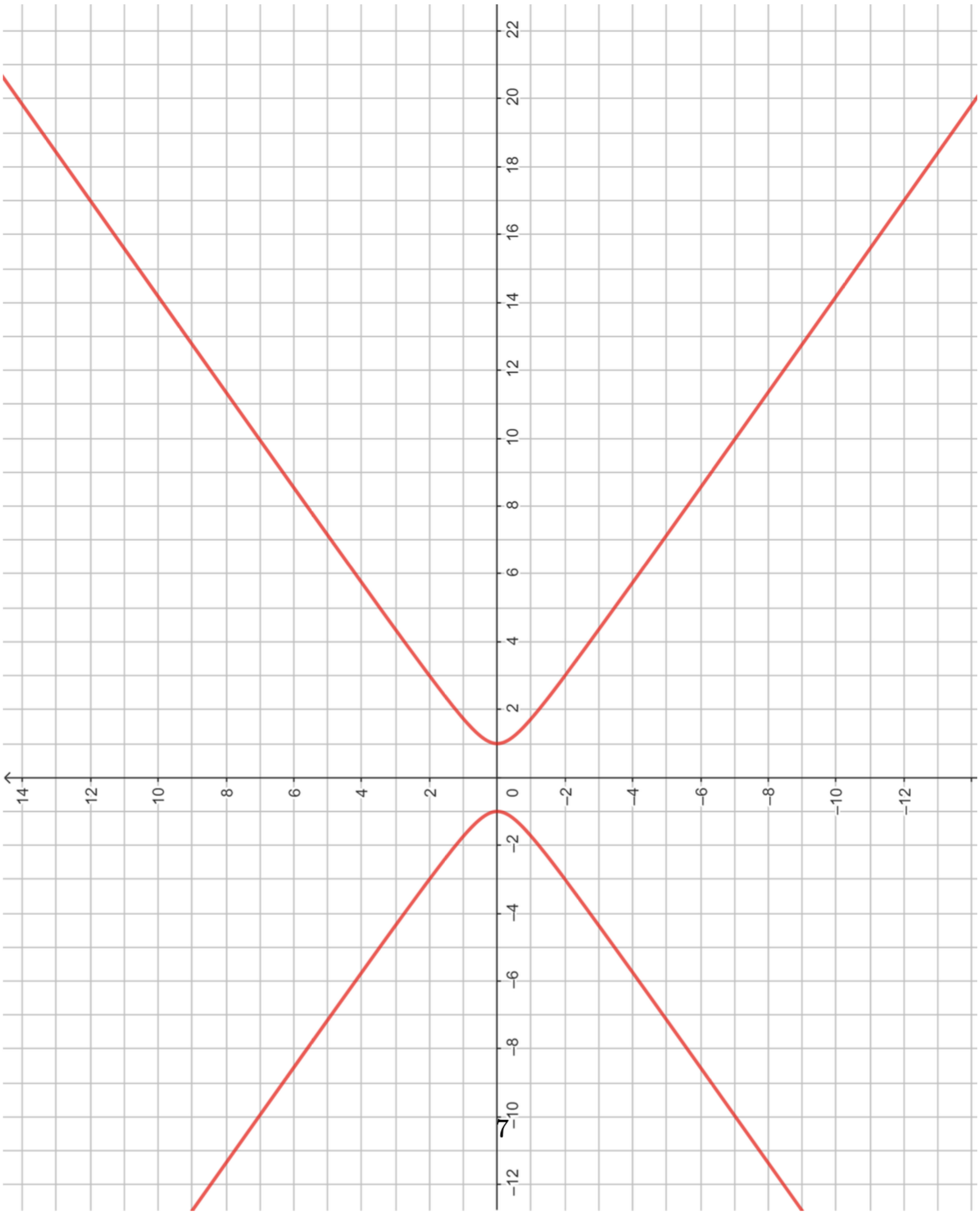
11. Un groupe de canards, dont on sait que le nombre d'individus est compris entre 1000 et 5000, hésite entre les deux formations ci-dessous pour un vol longue distance. Combien le groupe comporte-t-il de canards ?



Configuration 1



Configuration 2



– FIN DE L'ÉPREUVE –