

DEVOIR SURVEILLÉ 4

durée de l'épreuve : 4h

- La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.
- Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte quatre pages et est composé de quatre exercices et d'un problème, tous indépendants les uns des autres.

Exercice 1 (amuse-bouche).

Les questions 1. à 7. ci-dessous sont indépendantes.

1. Énoncer les formules de duplication du cosinus et du sinus.
On donnera les différentes formes lorsqu'il en existe plusieurs.
2. Donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité, et la dérivée de la fonction :

$$f : x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(2x + 1)$$

3. Donner la valeur de $\alpha = \operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right)$.

4. Donner une primitive :

- (a) F de $f : x \longmapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
- (b) G de $g : x \longmapsto x \cos(3x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$;
- (c) H de $h : x \longmapsto \frac{x}{(x^2 + 1)^4}$ sur $\mathbb{R}$.

Aucune justification n'est exigée ici.

5. Calculer l'intégrale $I = \int_0^\pi x \sin(x) \, dx$.
6. Soit $(G, \square)$ un groupe et $H \in \mathcal{P}(G) \setminus \{\emptyset\}$. Donner la définition de « $(H, \square)$ est un sous-groupe de $(G, \square)$ ».
7. Soient $(A, \star)$, $(B, \perp)$ deux groupes (d'éléments neutres notés e_A et e_B respectivement) et $\varphi \in B^A$.
 - (a) Donner la définition de « φ est un morphisme de groupes ».
 - (b) Définir le noyau de φ (on écrira l'ensemble en compréhension).

Exercice 2 (calcul intégral).

Dans cet exercice, on pose, pour tout entier naturel n ,

$$I_n = \int_1^e \frac{\ln(x)^n}{x^2} dx$$

L'objectif de la première question est d'exprimer I_n à l'aide d'une somme. Ceci va nous permettre d'en déduire, dans la deuxième question, la limite de la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

1. (a) Calculer I_0 .

(b) Déterminer la dérivée de $x \mapsto \frac{1 + \ln(x)}{x}$ et en déduire la valeur de I_1 .

(c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = -e^{-1} + (n+1)I_n$$

(d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = n! \left(1 - e^{-1} \times \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le changement de variable $t = \ln(x)$, montrer que :

$$I_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$$

(b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Indication : on utilisera la question 2.(a) et la propriété de croissance de l'intégrale, dont l'énoncé est rappelé ci-après.

(c) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis celle de la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Théorème (propriété de croissance de l'intégrale)

$f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leq g(x)$$

Alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Exercice 3 (trigonométrie).

Dans cet exercice, on fixe un élément x appartenant à l'intervalle $]0, 4[$ et on pose :

$$\omega = \operatorname{Arcsin} \left(\frac{x}{2} - 1 \right) + \frac{\pi}{2}$$

1. Justifier que ω est bien défini.
2. Démontrer que :

$$\cos(\omega) = 1 - \frac{x}{2}$$

3. (a) Montrer que les nombres $\cos \left(\frac{\omega}{2} \right)$ et $\sin \left(\frac{\omega}{2} \right)$ sont positifs ou nuls.
(b) Démontrer que :

$$\cos \left(\frac{\omega}{2} \right) = \frac{\sqrt{4-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \left(\frac{\omega}{2} \right) = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

4. Dédurre de ce qui précède que :

$$\operatorname{Arcsin} \left(\frac{x}{2} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} = 2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}} \right)$$

Exercice 4 (structure de groupe).

Soit k un rationnel fixé. On définit dans $\mathbb{Q}$ la loi $*$ par :

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, \quad a * b = a + b + kab$$

1. Montrer que la loi $*$ est associative.

Dans toute la suite de l'exercice, on supposera que $k = 1$.

2. Un élément a de $\mathbb{Q}$ est dit *régulier* dans le magma $(\mathbb{Q}, *)$ si :

$$\forall b, c \in \mathbb{Q}, \quad a * b = a * c \implies b = c$$

- (a) Démontrer que l'ensemble E des éléments réguliers de $(\mathbb{Q}, *)$ est $E = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$.
- (b) Montrer que $(E, *)$ est un groupe abélien.
- (c) Soit $a \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera a^{*n} la puissance n^e de l'élément a du groupe E , afin de ne pas confondre avec l'exponentiation usuelle. Autrement dit, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^{*n} = a * \cdots * a \text{ (} n \text{ fois)} \quad \text{tandis que} \quad a^n = a \times \cdots \times a \text{ (} n \text{ fois)}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a^{*n} = (a + 1)^n - 1$$

Problème (équations différentielles).

La partie I est utile pour traiter la question 3. (partie II). La troisième partie est indépendante des précédentes.

Partie I : résolution d'une équation différentielle du premier ordre

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2 y' + xy = 1 \quad (\mathcal{E})$$

Partie II : résolution d'une équation différentielle du second ordre

On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$x^2 y'' - xy' + y = x \quad (E_1)$$

2. (a) Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et solution de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction $g : t \mapsto y(e^t)$. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g''(t) - 2g'(t) + g(t) = e^t \quad (E_2)$$

(b) Résoudre l'équation différentielle (E_2) sur $\mathbb{R}$.

(c) En déduire l'ensemble des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Dans cette deuxième question, on résout (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$ par une autre méthode. **On n'utilisera donc pas les résultats de la question précédente.**

Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $z(x) = \frac{y(x)}{x}$.

- (a) Montrer que y est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est solution de l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$x^2 z'' + xz' = 1 \quad (E_3)$$

On pourra commencer par exprimer y , y' et y'' en fonction de z , z' et z'' .

(b) Résoudre l'équation (E_3) sur $\mathbb{R}_+^*$ en utilisant le changement de variable $Z = z'$.

(c) En déduire l'ensemble des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie III : une équation fonctionnelle

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}^*$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

4. Soit $f \in \mathcal{S}$.

(a) Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.

(b) Démontrer que la fonction f est impaire sur $\mathbb{R}$.

5. On cherche maintenant à déterminer l'expression de f sur $\mathbb{R}_+^*$ (puis sur $\mathbb{R}$).

(a) Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $xf' - f = kx$ où $k = f'(1)$.

(b) En déduire l'expression de f sur $\mathbb{R}_+^*$ en fonction de k puis son expression sur $\mathbb{R}$.

6. Conclure quant à l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation fonctionnelle proposée.

– FIN DE L'ÉPREUVE –