Devoir Surveillé 4

un corrigé

Exercice 1 (calcul intégral).

1. (a) On sait que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2\cos(x)^2 - 1 = 1 - 2\sin(x)^2}$$

(b) D'après la formule de duplication du cosinus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

donc :

$$\boxed{\text{une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } x \longmapsto \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}}$$

2. Posons :

$$u'(x) = x^2 \qquad v(x) = \ln(x)$$

$$u(x) = \frac{x^3}{3} \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$$

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} I = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left(\frac{\mathrm{e}^3}{9} - \frac{1}{9}\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{I = \frac{2\,\mathrm{e}^3}{9} + \frac{1}{9}}$$

3. (a) On a :

$$\boxed{K = \left[-\frac{1}{t+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}}$$

(b) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est bien défini (car $\frac{x}{2} \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$) et :

$$\begin{aligned} \frac{2t}{1+t^2} = 2 \times \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \times \frac{1}{1 + \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2}} &= 2 \times \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \times \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (\text{car } \cos^2 + \sin^2 = 1) \\ &= \sin\left(2 \times \frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

d'après la formule de duplication du sinus. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{où} \qquad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

(c) Le changement de variable se réécrit $x = 2\,\mathrm{Arctan}(t)$ donc $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

Par changement de variable, on a alors :

$$K = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2+2t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

Par conséquent :

$$\boxed{K = 2J = 1}$$

Exercice 2 (solutions d'une équation différentielle non linéaire).

1. (a) Soit $y \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ une solution de (E) ne s'annulant pas sur I. La fonction $z = \frac{1}{y}$ est dérivable sur I comme inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas et $z' = -\frac{y'}{y^2}$. Comme la fonction y vérifie l'équation différentielle (E) sur I, on a :

$$\forall t \in I, \qquad z'(t) = -\frac{y'(t)}{y(t)^2} = -\frac{1}{y(t)^2}\left(\frac{y(t)}{t} - \frac{y(t)^2}{t^2}\right)$$
$$= -\frac{1}{t} \times \frac{1}{y(t)} + \frac{1}{t^2}$$
$$= -\frac{z(t)}{t} + \frac{1}{t^2}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall t \in I, \qquad z'(t) + \frac{z(t)}{t} = \frac{1}{t^2}}$$

(b) L'équation différentielle (F) est linéaire du premier ordre.

★ Une primitive de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ sur I est $t \longmapsto \ln(t)$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée à (F) (à savoir $z' + \frac{z}{t} = 0$) est :

$$\left\{t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\ln(t)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{t \longmapsto \frac{C}{t} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

★ Déterminons maintenant une solution particulière de (E) sur I en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient donc $C \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ et $z : \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{C(t)}{t} \end{array}\right.$. La fonction z est dérivable sur I comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$\forall t \in I, \qquad z'(t) = \frac{C'(t)t - C(t)}{t^2}$$

donc :

$$(z \text{ est solution de } (F) \text{ sur } I) \iff \left(\forall t \in I,\ z'(t) + \frac{z(t)}{t} = \frac{1}{t^2}\right)$$
$$\iff \left(\forall t \in I,\ \frac{C'(t)}{t} - \frac{C(t)}{t^2} + \frac{C(t)}{t^2} = \frac{1}{t^2}\right)$$
$$\iff \left(\forall t \in I,\ C'(t) = \frac{1}{t}\right)$$

Par exemple, $C : t \longmapsto \ln(t)$. Une solution particulière de (E) sur I est donc $t \longmapsto \frac{\ln(t)}{t}$.

D'après le théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions de (F), on peut conclure que :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (F) \text{ sur } I \text{ est } \left\{t \longmapsto \frac{C}{t} + \frac{\ln(t)}{t} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$$

(c) Soient $C \in \mathbb{R}$ et $z_C : t \longmapsto \dfrac{C + \ln(t)}{t}$.

i. On raisonne par double implication.

★ Si $C \geqslant 0$, alors pour tout $t \in I$ (*i.e.* pour tout $t > 1$ par définition de I) on a $\ln(t) > 0$ puis $C + \ln(t) > 0$ et donc $z_C(t) > 0$ comme quotient de nombres strictement positifs. En particulier, la fonction z_C ne s'annule pas sur I.

★ Réciproquement supposons que $C < 0$. Alors $\mathrm{e}^{-C} > 1$ et il est clair que la fonction z_C s'annule en e^{-C}. Par contraposition, si z_C ne s'annule pas sur I, alors $C \geqslant 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } z_C \text{ s'annule sur } I \text{ si et seulement si } C \geqslant 0}$$

ii. La fonction y_C ne s'annule pas et est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, \qquad y_C'(t) = \frac{C + \ln(t) - t \times \frac{1}{t}}{(C + \ln(t))^2} = \frac{C + \ln(t) - 1}{(C + \ln(t))^2}$$

Pour tout $t \in I$, on a alors :

$$\begin{aligned} y_C'(t) - \frac{y_C(t)}{t} + \frac{y_C(t)^2}{t^2} &= \frac{C + \ln(t) - 1}{(C + \ln(t))^2} - \frac{1}{C + \ln(t)} + \frac{1}{(C + \ln(t))^2} \\ &= \frac{C + \ln(t) - 1 - C - \ln(t) + 1}{(C + \ln(t))^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{la fonction } y_C \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I}$$

2. Résumons : si y est une solution de (E) sur I qui ne s'annule pas (*i.e.* si y est un élément de $\mathscr{S}_E$), alors la fonction $z = \dfrac{1}{y}$ est solution de (F) sur I et ne s'annule pas (car $z = \frac{1}{y}$). D'après la question précédente, il existe donc $C \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in I, \qquad y(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{t}{C + \ln(t)}$$

On a donc l'inclusion :

$$\mathscr{S}_E \subset \left\{ t \longmapsto \frac{t}{C + \ln(t)} \;\middle|\; C \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

Réciproquement, nous avons montré à la question 1.(c)ii. l'inclusion :

$$\left\{ t \longmapsto \frac{t}{C + \ln(t)} \;\middle|\; C \in \mathbb{R}_+ \right\} \subset \mathscr{S}_E$$

Par double inclusion, on peut conclure que :

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ t \longmapsto \frac{t}{C + \ln(t)} \;\middle|\; C \in \mathbb{R}_+ \right\}}$$

Problème 1 (résolution d'une équation différentielle du second ordre).

Partie I : étude de deux cas particuliers

1. L'équation différentielle (E_1) est linéaire du second ordre à coefficients constants.

★ L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $x^2 - 1 = 0$. Ses racines sont -1 et 1 donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' - y = 0$ est :

$$\left\{ x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{x} \;\middle|\; A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

★ Déterminons maintenant une solution particulière de (E_1) de la forme[1] $y : x \longmapsto ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. La fonction y est clairement deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) = 2ax + b \qquad \text{et} \qquad y''(x) = 2a$$

1. Le second membre est un polynôme et 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique.

donc :

$$\begin{aligned}
(y \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}) &\iff \big(\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - y(x) = x^2 + x + 1\big) \\
&\iff \big(\forall x \in \mathbb{R},\ -ax^2 - bx + (2a - c) = x^2 + x + 1\big) \\
&\iff \begin{cases} -a = 1 \\ -b = 1 \\ 2a - c = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit qu'une solution particulière de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto -x^2 - x - 3$

On conclut donc que :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \left\{x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{x} - x^2 - x - 3 \,\middle|\, A, B \in \mathbb{R}\right\}}$$

2. On a déjà résolu l'équation homogène à la question précédente. Déterminons une solution particulière sous la forme[2] $y : x \longmapsto Ax\,\mathrm{e}^{x}$ où $A \in \mathbb{R}$. La fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) = A(x+1)\,\mathrm{e}^{x} \qquad \text{et} \qquad y''(x) = A(x+2)\,\mathrm{e}^{x}$$

donc :

$$\begin{aligned}
(y \text{ est solution de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R}) &\iff (\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - y(x) = \mathrm{e}^{x}) \\
&\iff (\forall x \in \mathbb{R},\ A(x+2)\,\mathrm{e}^{x} - Ax\,\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}) \\
&\iff 2A = 1
\end{aligned}$$

Ainsi, une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{x}{2}\,\mathrm{e}^{x}$. On conclut donc que :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \left\{x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{x} + \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{x} \,\middle|\, A, B \in \mathbb{R}\right\}}$$

Partie II : étude du cas général

3. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b) &= \frac{\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}}{2} \times \frac{\mathrm{e}^{b} + \mathrm{e}^{-b}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{a} + \mathrm{e}^{-a}}{2} \times \frac{\mathrm{e}^{b} - \mathrm{e}^{-b}}{2} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^{b} + \mathrm{e}^{-b}) - (\mathrm{e}^{a} + \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^{b} - \mathrm{e}^{-b})}{4} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{a+b} + \mathrm{e}^{a-b} - \mathrm{e}^{-a+b} - \mathrm{e}^{-a-b} - \mathrm{e}^{a+b} + \mathrm{e}^{a-b} - \mathrm{e}^{-a+b} + \mathrm{e}^{-a-b}}{4} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{a-b} - \mathrm{e}^{-(a-b)}}{2} \\
&= \mathrm{sh}(a-b)
\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b)}$$

La deuxième identité se démontre de manière analogue.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = \left(\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 &= \frac{\big(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\big)^2 + \big(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\big)^2}{4} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x} - \big(\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}\big)}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1}$$

2. Le second membre est de la forme $B\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ et $\lambda = 1$ est ici racine simple de l'équation caractéristique.

4. En utilisant la formule établie à la question 3.(a), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \big(\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(t) - \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(t)\big) g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \big(\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(t)g(t) - \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(t)g(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

d'où l'on tire, en utilisant la propriété de linéarité de l'intégrale, que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \operatorname{sh}(x)\int_0^x \operatorname{ch}(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \operatorname{ch}(x)\int_0^x \operatorname{sh}(t)g(t)\,\mathrm{d}t}$$

5. Les fonctions $\operatorname{ch} \times g$ et $\operatorname{sh} \times g$ sont continues sur $\mathbb{R}$ comme produits de fonctions qui le sont. On en déduit que les fonctions $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \operatorname{ch}(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \operatorname{sh}(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Comme les fonctions ch et sh sont également dérivables sur $\mathbb{R}$, la f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produits de fonctions qui le sont et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \operatorname{ch}(x)\int_0^x \operatorname{ch}(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)g(x) - \operatorname{sh}(x)\int_0^x \operatorname{sh}(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)g(x)\\
&= \operatorname{ch}(x)\int_0^x \operatorname{ch}(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \operatorname{sh}(x)\int_0^x \operatorname{sh}(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad (1)\\
&= \int_0^x \big(\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(t)\big)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(par linéarité de l'intégrale)}
\end{aligned}$$

En utilisant la deuxième relation établie à la question 3.(a), on a bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t}$$

6. D'après l'égalité (1), et en utilisant le même raisonnement que celui mené à la question précédente, on obtient que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) &= \operatorname{sh}(x)\int_0^x \operatorname{ch}(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \operatorname{ch}(x)^2 g(x) - \operatorname{ch}(x)\int_0^x \operatorname{sh}(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \operatorname{sh}(x)^2 g(x)\\
&= (\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2)g(x) + \int_0^x (\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(t) - \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(t))g(t)\,\mathrm{d}t\\
&= g(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t\\
&= g(x) + f(x)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) - f(x) = g(x)}$$

7. D'après ce qui précède, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est solution de (E_g) sur $\mathbb{R}$. Quant à l'équation homogène, elle a été résolue à la question 1. On conclut donc que :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_g) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \left\{ x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{x} + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t \;\middle|\; A, B \in \mathbb{R} \right\}}$$

Problème 2 (l'équation de Pell-Fermat).

Partie I : étude de $(G, \star)$

1. (a) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On a d'une part :

$$\begin{aligned}
(ac+2bd)^2 - 2(ad+bc)^2 &= a^2c^2 + 4abcd + 4b^2d^2 - 2(a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2)\\
&= a^2c^2 + 4b^2d^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$(a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2 + 4b^2d^2$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \qquad (ac+2bd)^2 - 2(ad+bc)^2 = (a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2)}$$

(b) Soient $(a,b),(c,d) \in G$. Montrons que $(a,b) \star (c,d) \in G$. Par définition de $\star$, on a :

$$(a,b) \star (c,d) = (ac+2bd, ad+bc) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

car toute somme ou produit d'entiers est un entier. D'après la question précédente, on a de plus :

$$(ac+2bd)^2 - 2(ad+bc)^2 = (a^2-2b^2)(c^2-2d^2) = 1 \times 1 = 1$$

car (a,b) et (c,d) sont des éléments de G. Ainsi, $(a,b) \star (c,d) \in G$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\star \text{ est une loi de composition interne sur } G}$$

2. Soient $(a,b),(c,d),(e,f) \in G$.
   - On a :

   $$(c,d) \star (a,b) = (ca+2db, da+cb) = (ac+2bd, ad+bc) = (c,d) * (a,b)$$

   par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$. Ainsi :

   $$\boxed{\text{la loi } \star \text{ est commutative}}$$

   - De plus, on a d'une part :

   $$\begin{aligned}\big((a,b) \star (c,d)\big) \star (e,f) &= (ac+2bd, ad+bc) \star (e,f) \\ &= \big((ac+2bd)e + 2(ad+bc)f, (ac+2bd)f + (ad+bc)e\big) \\ &= (ace+2bde+2adf+2bcf, acf+2bdf+ade+bce)\end{aligned}$$

   et d'autre part :

   $$\begin{aligned}(a,b) \star \big((c,d) \star (e,f)\big) &= (a,b) \star (ce+2df, cf+de) \\ &= \big(a(ce+2df) + 2b(cf+de), a(cf+de) + b(ce+2df)\big) \\ &= (ace+2adf+2bcf+2bde, acf+ade+bce+2bdf) \\ &= \big((a,b) \star (c,d)\big) \star (e,f)\end{aligned}$$

   On en déduit que :

   $$\boxed{\text{la loi } \star \text{ est associative}}$$

3. Remarquons que le couple $(1,0)$ appartient à G car $(1,0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $1^2 - 2 \times 0^2 = 1$. De plus, pour tout $(a,b) \in G$, on a :

$$(a,b) \star (1,0) = (a \times 1 + 2b \times 0, a \times 0 + b \times 1) = (a,b),$$

et, comme le magma $(G,\star)$ est commutatif, on a aussi $(1,0) \star (a,b) = (a,b)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{le magma } (G,\star) \text{ admet le couple } (1,0) \text{ comme élément neutre}}$$

4. Soit $(a,b) \in G$. On a :

$$(a,b) \star (a,-b) = (a^2-2b^2, a \times (-b) + b \times a) = (1,0)$$

car $a^2 - 2b^2 = 1$ puisque $(a,b) \in G$. Ainsi :

$$\boxed{\forall (a,b) \in G, \qquad (a,b) \star (a,-b) = (1,0)}$$

5. Tout d'abord, l'ensemble G est non vide (car il contient $(1,0)$). Ensuite :
   - la loi $\star$ est associative et commutative dans G ;
   - on sait que le magma $(G,\star)$ admet un élément neutre (à savoir $(1,0)$) ;
   - enfin, d'après la question précédente, tout élément de G est inversible pour la loi $\star$. En effet, pour tout $(a,b) \in G$:
     — on a bien $(a,-b) \in G$ car $a^2 - 2(-b)^2 = a^2 - 2b^2 = 1$;
     — et la relation $(a,b)\star(a,-b) = (1,0)$ établie à la question précédente entraîne que $(a,-b)\star(a,b) = (1,0)$ par commutativité de la loi.

   On peut donc conclure que :

$$\boxed{(G,\star) \text{ est un groupe abélien}}$$

Partie II : étude des itérés d'un élément de G

6. (a) Soit $b \in \mathbb{Z}$. On a :

$$(1,b) \in G \iff 1^2 - 2b^2 = 1 \iff b^2 = 0 \iff b = 0$$

donc :

$$\boxed{\text{le seul élément de } G \text{ de la forme } (1,b) \text{ (où } b \in \mathbb{Z}) \text{ est l'élément neutre } (1,0)}$$

(b) Soit $b \in \mathbb{Z}$. On a :

$$(2,b) \in G \iff 4 - 2b^2 = 1 \iff 2b^2 = 3,$$

ce qui n'est pas possible car 3 n'est pas un nombre pair. Donc :

$$\boxed{G \text{ ne contient pas d'élément de la forme } (2,b) \text{ où } b \in \mathbb{Z}}$$

7. On a $(3,2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $3^2 - 2 \times 2^2 = 9 - 8 = 1$ donc :

$$\boxed{\text{le couple } x = (3,2) \text{ est un élément de } G}$$

8. D'une part, on a $x^0 = (1,0)$ et d'autre part, on sait que $x^0 = (a_0, b_0)$ (par définition des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$). En identifiant les coordonnées, on a bien :

$$\boxed{a_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad b_0 = 0}$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. Par définition de x^{n+1}, on a :

$$x^{n+1} = x^n \star x = (a_n, b_n) \star (3,2) = (3a_n + 2 \times b_n \times 2, 2a_n + 3b_n) = (3a_n + 4b_n, 2a_n + 3b_n)$$

Par ailleurs, on sait que $x^{n+1} = (a_{n+1}, b_{n+1})$ donc, par identification, on a bien les deux égalités annoncées. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 3a_n + 4b_n \\ b_{n+1} & = & 2a_n + 3b_n \end{array} \right.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4b_{n+1}$ (d'après la première relation de récurrence établie). En utilisant la seconde, il vient :

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4(2a_n + 3b_n) = 3a_{n+1} + 8a_n + 12b_n$$

Or on a $4b_n = a_{n+1} - 3a_n$ donc :

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 8a_n + 3(a_{n+1} - 3a_n) = 6a_{n+1} - a_n$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n}$$

10. On utilise un raisonnement par récurrence double.

⋆ On sait que $a_0 = 1$ (et $b_0 = 0$) donc, d'après la question 8., on a $a_1 = 3 \times 1 + 4 \times 0 = 3$. D'autre part, on a :

$$\frac{(3-2\sqrt{2})^0 + (3+2\sqrt{2})^0}{2} = 1 = a_0 \qquad \text{et} \qquad \frac{(3-2\sqrt{2}) + (3+2\sqrt{2})}{2} = 3 = a_1$$

donc les égalités sont vraies pour $n \in \{0,1\}$.

⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que :

$$a_n = \frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^n + \left(3+2\sqrt{2}\right)^n}{2} \qquad \text{et} \qquad a_{n+1} = \frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2}$$

Montrons que $a_{n+2} = \dfrac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{n+2} + \left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+2}}{2}$. D'après la question 9., on a :

$$\begin{aligned} a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n &= 6 \times \frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2} - \frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^n + \left(3+2\sqrt{2}\right)^n}{2} \\ &= \frac{(3-2\sqrt{2})^n\big(6(3-2\sqrt{2})-1\big) + (3-2\sqrt{2})^n\big(6(3+2\sqrt{2})-1\big)}{2} \\ &= \frac{(3-2\sqrt{2})^n\big(17-12\sqrt{2}\big) + (3-2\sqrt{2})^n\big(17+12\sqrt{2}\big)}{2} \end{aligned}$$

Or on a $\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)^2 = 17 \pm 12\sqrt{2}$ donc :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{(3-2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^2 + (3+2\sqrt{2})^n(3+2\sqrt{2})^2}{2} \\ &= \frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{n+2} + \left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+2}}{2} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n+2$.

Par principe de récurrence double, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^n + \left(3+2\sqrt{2}\right)^n}{2}}$$

Remarque : la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant récurrente linéaire d'ordre 2, on peut aussi trouver son terme général en résolvant l'équation caractéristique associée.