

DEVOIR SURVEILLÉ 4

un corrigé

Exercice 1 (calcul intégral).

1. (a) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2 \cos(x)^2 - 1 = 1 - 2 \sin(x)^2$$

(b) D'après la formule de duplication du cosinus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

donc :

$$\text{une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$$

2. Posons :

$$\begin{aligned} u'(x) &= x^2 & v(x) &= \ln(x) \\ u(x) &= \frac{x^3}{3} & v'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^e \\ &= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9} \right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$I = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}$$

3. (a) On a :

$$K = \left[-\frac{1}{t+1} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

(b) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est bien défini (car $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$) et :

$$\begin{aligned} \frac{2t}{1+t^2} &= 2 \times \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \times \frac{1}{1 + \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = 2 \times \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \times \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad (\text{car } \cos^2 + \sin^2 = 1) \\ &= \sin\left(2 \times \frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

d'après la formule de duplication du sinus. Ainsi :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{où} \quad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

(c) Le changement de variable se réécrit $x = 2 \operatorname{Arctan}(t)$ donc $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

Par changement de variable, on a alors :

$$K = \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2+2t} dt = 2 \int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2} dt$$

Par conséquent :

$$\boxed{K = 2J = 1}$$

Exercice 2 (solutions d'une équation différentielle non linéaire).

1. (a) Soit $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ une solution de (E) ne s'annulant pas sur I . La fonction $z = \frac{1}{y}$ est dérivable sur I comme inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas et $z' = -\frac{y'}{y^2}$. Comme la fonction y vérifie l'équation différentielle (E) sur I , on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad z'(t) &= -\frac{y'(t)}{y(t)^2} = -\frac{1}{y(t)^2} \left(\frac{y(t)}{t} - \frac{y(t)^2}{t^2} \right) \\ &= -\frac{1}{t} \times \frac{1}{y(t)} + \frac{1}{t^2} \\ &= -\frac{z(t)}{t} + \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall t \in I, \quad z'(t) + \frac{z(t)}{t} = \frac{1}{t^2}}$$

- (b) L'équation différentielle (F) est linéaire du premier ordre.

- ★ Une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur I est $t \mapsto \ln(t)$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée à (F) (à savoir $z' + \frac{z}{t} = 0$) est :

$$\left\{ t \mapsto C e^{-\ln(t)} \mid C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \mapsto \frac{C}{t} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

- ★ Déterminons maintenant une solution particulière de (E) sur I en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient donc $C \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $z : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \frac{C(t)}{t} \end{cases}$. La fonction z est dérivable sur I comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$\forall t \in I, \quad z'(t) = \frac{C'(t)t - C(t)}{t^2}$$

donc :

$$\begin{aligned} (z \text{ est solution de (F) sur } I) &\iff \left(\forall t \in I, z'(t) + \frac{z(t)}{t} = \frac{1}{t^2} \right) \\ &\iff \left(\forall t \in I, \frac{C'(t)t - C(t)}{t^2} - \frac{C(t)}{t^2} + \frac{C(t)}{t^2} = \frac{1}{t^2} \right) \\ &\iff \left(\forall t \in I, C'(t) = \frac{1}{t} \right) \end{aligned}$$

Par exemple, $C : t \mapsto \ln(t)$. Une solution particulière de (E) sur I est donc $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$.

D'après le théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions de (F), on peut conclure que :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de (F) sur } I \text{ est } \left\{ t \mapsto \frac{C}{t} + \frac{\ln(t)}{t} \mid C \in \mathbb{R} \right\}}$$

(c) Soient $C \in \mathbb{R}$ et $z_C : t \mapsto \frac{C + \ln(t)}{t}$.

i. On raisonne par double implication.

★ Si $C \geq 0$, alors pour tout $t \in I$ (i.e. pour tout $t > 1$ par définition de I) on a $\ln(t) > 0$ puis $C + \ln(t) > 0$ et donc $z_C(t) > 0$ comme quotient de nombres strictement positifs. En particulier, la fonction z_C ne s'annule pas sur I .

★ Réciproquement supposons que $C < 0$. Alors $e^{-C} > 1$ et il est clair que la fonction z_C s'annule en e^{-C} . Par contraposition, si z_C ne s'annule pas sur I , alors $C \geq 0$.

Ainsi :

la fonction z_C s'annule sur I si et seulement si $C \geq 0$

ii. La fonction y_C ne s'annule pas et est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, \quad y'_C(t) = \frac{C + \ln(t) - t \times \frac{1}{t}}{(C + \ln(t))^2} = \frac{C + \ln(t) - 1}{(C + \ln(t))^2}$$

Pour tout $t \in I$, on a alors :

$$\begin{aligned} y'_C(t) - \frac{y_C(t)}{t} + \frac{y_C(t)^2}{t^2} &= \frac{C + \ln(t) - 1}{(C + \ln(t))^2} - \frac{1}{C + \ln(t)} + \frac{1}{(C + \ln(t))^2} \\ &= \frac{C + \ln(t) - 1 - C - \ln(t) + 1}{(C + \ln(t))^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc :

la fonction y_C est solution de (E) sur I

2. Résumons : si y est une solution de (E) sur I qui ne s'annule pas (i.e. si y est un élément de \mathcal{S}_E), alors la fonction $z = \frac{1}{y}$ est solution de (F) sur I et ne s'annule pas (car $z = \frac{1}{y}$). D'après la question précédente, il existe donc $C \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{t}{C + \ln(t)}$$

On a donc l'inclusion :

$$\mathcal{S}_E \subset \left\{ t \mapsto \frac{t}{C + \ln(t)} \mid C \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

Réciproquement, nous avons montré à la question 1.(c)ii. l'inclusion réciproque, à savoir :

$$\left\{ t \mapsto \frac{t}{C + \ln(t)} \mid C \in \mathbb{R}_+ \right\} \subset \mathcal{S}_E$$

Par double inclusion, on peut conclure que :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ t \mapsto \frac{t}{C + \ln(t)} \mid C \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

Problème 1 (résolution d'une équation différentielle du second ordre).

Partie I : étude de deux cas particuliers

1. L'équation différentielle (E_1) est linéaire du second ordre à coefficients constants.

★ L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $x^2 - 1 = 0$. Ses racines sont -1 et 1 donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' - y = 0$ est :

$$\left\{ x \mapsto A e^{-x} + B e^x \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

★ Déterminons maintenant une solution particulière de (E_1) de la forme¹ $y : x \mapsto ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. La fonction y est clairement deux fois dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = 2ax + b \quad \text{et} \quad y''(x) = 2a$$

1. Le second membre est un polynôme et 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique.

donc :

$$\begin{aligned}
 (y \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}) &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - y(x) = x^2 + x + 1) \\
 &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, -ax^2 - bx + (2a - c) = x^2 + x + 1) \\
 &\iff \begin{cases} -a = 1 \\ -b = 1 \\ 2a - c = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On en déduit qu'une solution particulière de (E_1) sur \mathbb{R} est $x \mapsto -x^2 - x - 3$

On conclut donc que :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \left\{ x \mapsto A e^{-x} + B e^x - x^2 - x - 3 \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}}$$

2. On a déjà résolu l'équation homogène à la question précédente. Déterminons une solution particulière sous la forme $y : x \mapsto A x e^x$ où $A \in \mathbb{R}$. La fonction y est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = A(x+1)e^x \quad \text{et} \quad y''(x) = A(x+2)e^x$$

donc :

$$\begin{aligned}
 (y \text{ est solution de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R}) &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - y(x) = e^x) \\
 &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, A(x+2)e^x - A x e^x = e^x) \\
 &\iff 2A = 1
 \end{aligned}$$

Ainsi, une solution de (E_2) sur \mathbb{R} est $x \mapsto \frac{x}{2} e^x$. On conclut donc que :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \left\{ x \mapsto A e^{-x} + B e^x + \frac{x}{2} e^x \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}}$$

Partie II : étude du cas général

3. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
 \text{sh}(a) \text{ch}(b) - \text{ch}(a) \text{sh}(b) &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} \times \frac{e^b + e^{-b}}{2} - \frac{e^a + e^{-a}}{2} \times \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\
 &= \frac{(e^a - e^{-a})(e^b + e^{-b}) - (e^a + e^{-a})(e^b - e^{-b})}{4} \\
 &= \frac{e^{a+b} + e^{a-b} - e^{-a+b} - e^{-a-b} - e^{a+b} + e^{a-b} - e^{-a+b} + e^{-a-b}}{4} \\
 &= \frac{e^{a-b} - e^{-(a-b)}}{2} \\
 &= \text{sh}(a - b)
 \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}(a - b) = \text{sh}(a) \text{ch}(b) - \text{ch}(a) \text{sh}(b)}$$

La deuxième identité se démontre de manière analogue.

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
 \text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2}{4} \\
 &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2 = 1}$$

2. Le second membre est de la forme $B e^{\lambda x}$ et $\lambda = 1$ est ici racine simple de l'équation caractéristique.

4. En utilisant la formule établie à la question 3.(a), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x (\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(t) - \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(t))g(t) dt = \int_0^x (\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(t)g(t) - \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(t)g(t)) dt,$$

d'où l'on tire, en utilisant la propriété de linéarité de l'intégrale, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{sh}(x) \int_0^x \operatorname{ch}(t)g(t) dt - \operatorname{ch}(x) \int_0^x \operatorname{sh}(t)g(t) dt$$

5. Les fonctions $\operatorname{ch} \times g$ et $\operatorname{sh} \times g$ sont continues sur \mathbb{R} comme produits de fonctions qui le sont. On en déduit que les fonctions $x \mapsto \int_0^x \operatorname{ch}(t)g(t) dt$ et $x \mapsto \int_0^x \operatorname{sh}(t)g(t) dt$ sont dérivables sur \mathbb{R} . Comme les fonctions ch et sh sont également dérivables sur \mathbb{R} , la f est dérivable sur \mathbb{R} comme somme et produits de fonctions qui le sont et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{ch}(x) \int_0^x \operatorname{ch}(t)g(t) dt + \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)g(x) - \operatorname{sh}(x) \int_0^x \operatorname{sh}(t)g(t) dt - \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x)g(x) \\ &= \operatorname{ch}(x) \int_0^x \operatorname{ch}(t)g(t) dt - \operatorname{sh}(x) \int_0^x \operatorname{sh}(t)g(t) dt \\ &= \int_0^x (\operatorname{ch}(x) \operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(t))g(t) dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \end{aligned} \tag{1}$$

En utilisant la deuxième relation établie à la question 3.(a), on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)g(t) dt$$

6. D'après l'égalité (1), et en utilisant le même raisonnement que celui mené à la question précédente, on obtient que f' est dérivable sur \mathbb{R} et que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) &= \operatorname{sh}(x) \int_0^x \operatorname{ch}(t)g(t) dt + \operatorname{ch}(x)^2g(x) - \operatorname{ch}(x) \int_0^x \operatorname{sh}(t)g(t) dt - \operatorname{sh}(x)^2g(x) \\ &= (\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2)g(x) + \int_0^x (\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(t) - \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(t))g(t) dt \\ &= g(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t) dt \\ &= g(x) + f(x) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - f(x) = g(x)$$

7. D'après ce qui précède, la fonction $x \mapsto \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t) dt$ est solution de (E_g) sur \mathbb{R} . Quant à l'équation homogène, elle a été résolue à la question 1. On conclut donc que :

$$\text{l'ensemble des solutions de } (E_g) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \left\{ x \mapsto A e^{-x} + B e^x + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t) dt \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Problème 2 (l'équation de Pell-Fermat).

Partie I : étude de (G, \star)

1. (a) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On a d'une part :

$$\begin{aligned} (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 &= a^2c^2 + 4abcd + 4b^2d^2 - 2(a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2) \\ &= a^2c^2 + 4b^2d^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2 \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$(a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2 + 4b^2d^2$$

Ainsi, on a bien :

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 = (a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2)$$

(b) Soient $(a, b), (c, d) \in G$. Montrons que $(a, b) \star (c, d) \in G$. Par définition de \star , on a :

$$(a, b) \star (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

car toute somme ou produit d'entiers est un entier. D'après la question précédente, on a de plus :

$$(ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 = (a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = 1 \times 1 = 1$$

car (a, b) et (c, d) sont des éléments de G . Ainsi, $(a, b) \star (c, d) \in G$. On peut donc conclure que :

\star est une loi de composition interne sur G

2. Soient $(a, b), (c, d), (e, f) \in G$.

• On a :

$$(c, d) \star (a, b) = (ca + 2db, da + cb) = (ac + 2bd, ad + bc)$$

par commutativité de la multiplication dans \mathbb{R} . Ainsi :

la loi \star est commutative

• De plus, on a d'une part :

$$\begin{aligned} ((a, b) \star (c, d)) \star (e, f) &= (ac + 2bd, ad + bc) \star (e, f) \\ &= ((ac + 2bd)e + 2(ad + bc)f, (ac + 2bd)f + (ad + bc)e) \\ &= (ace + 2bde + 2adf + 2bcf, acf + 2bdf + ade + bce) \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} (a, b) \star ((c, d) \star (e, f)) &= (a, b) \star (ce + 2df, cf + de) \\ &= (a(ce + 2df) + 2b(cf + de), a(cf + de) + b(ce + 2df)) \\ &= (ace + 2adf + 2bcf + 2bde, acf + ade + bce + 2bdf) \\ &= ((a, b) \star (c, d)) \star (e, f) \end{aligned}$$

On en déduit que :

la loi \star est associative

3. Remarquons que le couple $(1, 0)$ appartient à G car $(1, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $1^2 - 2 \times 0^2 = 1$. De plus, pour tout $(a, b) \in G$, on a :

$$(a, b) \star (1, 0) = (a \times 1 + 2b \times 0, a \times 0 + b \times 1) = (a, b),$$

et, comme le magma (G, \star) est commutatif, on a aussi $(1, 0) \star (a, b) = (a, b)$. Ainsi :

le magma (G, \star) admet le couple $(1, 0)$ comme élément neutre

4. Soit $(a, b) \in G$. On a :

$$(a, b) \star (a, -b) = (a^2 - 2b^2, a \times (-b) + b \times a) = (1, 0)$$

car $a^2 - 2b^2 = 1$ puisque $(a, b) \in G$. Ainsi :

$$\forall (a, b) \in G, \quad (a, b) \star (a, -b) = (1, 0)$$

5. Tout d'abord, l'ensemble G est non vide (car il contient $(1, 0)$). Ensuite :

- la loi \star est associative et commutative dans G ;
- on sait que le magma (G, \star) admet un élément neutre (à savoir $(1, 0)$) ;
- enfin, d'après la question précédente, tout élément de G est inversible pour la loi \star . En effet, pour tout $(a, b) \in G$:
 - on a bien $(a, -b) \in G$ car $a^2 - 2(-b)^2 = a^2 - 2b^2 = 1$;
 - et la relation $(a, b) \star (a, -b) = (1, 0)$ établie à la question précédente entraîne que $(a, -b) \star (a, b) = (1, 0)$ par commutativité de la loi.

On peut donc conclure que :

(G, \star) est un groupe abélien

Partie II : étude des itérés d'un élément de G

6. (a) Soit $b \in \mathbb{Z}$. On a :

$$(1, b) \in G \iff 1^2 - 2b^2 = 1 \iff b^2 = 0 \iff b = 0$$

donc :

le seul élément de G de la forme $(1, b)$ (où $b \in \mathbb{Z}$) est l'élément neutre $(1, 0)$

(b) Soit $b \in \mathbb{Z}$. On a :

$$(2, b) \in G \iff 4 - 2b^2 = 1 \iff 2b^2 = 3,$$

ce qui n'est pas possible car 3 n'est pas un nombre pair. Donc :

G ne contient pas d'élément de la forme $(2, b)$ où $b \in \mathbb{Z}$

7. On a $(3, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $3^2 - 2 \times 2^2 = 9 - 8 = 1$ donc :

le couple $x = (3, 2)$ est un élément de G

8. D'une part, on a $x^0 = (1, 0)$ et d'autre part, on sait que $x^0 = (a_0, b_0)$ (par définition des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$). En identifiant les coordonnées, on a bien :

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad b_0 = 0$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. Par définition de x^{n+1} , on a :

$$x^{n+1} = x^n \star x = (a_n, b_n) \star (3, 2) = (3a_n + 2 \times b_n \times 2, 2a_n + 3b_n) = (3a_n + 4b_n, 2a_n + 3b_n)$$

Par ailleurs, on sait que $x^{n+1} = (a_{n+1}, b_{n+1})$ donc, par identification, on a bien les deux égalités annoncées. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4b_{n+1}$ (d'après la première relation de récurrence établie). En utilisant la seconde, il vient :

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4(2a_n + 3b_n) = 3a_{n+1} + 8a_n + 12b_n$$

Or on a $4b_n = a_{n+1} - 3a_n$ donc :

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 8a_n + 3(a_{n+1} - 3a_n) = 6a_{n+1} - a_n$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n$$

10. On utilise un raisonnement par récurrence double.

★ On sait que $a_0 = 1$ (et $b_0 = 0$) donc, d'après la question 8., on a $a_1 = 3 \times 1 + 4 \times 0 = 3$. D'autre part, on a :

$$\frac{(3 - 2\sqrt{2})^0 + (3 + 2\sqrt{2})^0}{2} = 1 = a_0 \quad \text{et} \quad \frac{(3 - 2\sqrt{2}) + (3 + 2\sqrt{2})}{2} = 3 = a_1$$

donc les égalités sont vraies pour $n \in \{0, 1\}$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que :

$$a_n = \frac{(3 - 2\sqrt{2})^n + (3 + 2\sqrt{2})^n}{2} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \frac{(3 - 2\sqrt{2})^{n+1} + (3 + 2\sqrt{2})^{n+1}}{2}$$

Montrons que $a_{n+2} = \frac{(3 - 2\sqrt{2})^{n+2} + (3 + 2\sqrt{2})^{n+2}}{2}$. D'après la question 9., on a :

$$\begin{aligned} a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n &= 6 \times \frac{(3 - 2\sqrt{2})^{n+1} + (3 + 2\sqrt{2})^{n+1}}{2} - \frac{(3 - 2\sqrt{2})^n + (3 + 2\sqrt{2})^n}{2} \\ &= \frac{(3 - 2\sqrt{2})^n (6(3 - 2\sqrt{2}) - 1) + (3 - 2\sqrt{2})^n (6(3 + 2\sqrt{2}) - 1)}{2} \\ &= \frac{(3 - 2\sqrt{2})^n (17 - 12\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2})^n (17 + 12\sqrt{2})}{2} \end{aligned}$$

Or on a $(3 \pm 2\sqrt{2})^2 = 17 \pm 12\sqrt{2}$ donc :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{(3 - 2\sqrt{2})^n(3 - 2\sqrt{2})^2 + (3 + 2\sqrt{2})^n(3 + 2\sqrt{2})^2}{2} \\ &= \frac{(3 - 2\sqrt{2})^{n+2} + (3 + 2\sqrt{2})^{n+2}}{2} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n + 2$.

Par principe de récurrence double, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(3 - 2\sqrt{2})^n + (3 + 2\sqrt{2})^n}{2}}$$