

DEVOIR SURVEILLÉ 4

un corrigé

Exercice 1 (amuse-bouche).

1. On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1 = 1 - 2\sin(x)^2 = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

2. Notons $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f . La fonction Arcsin est définie sur $[-1, 1]$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{D}_f \iff 2x+1 \in [-1, 1] \iff -1 \leq 2x+1 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 0$$

Autrement dit, f est définie sur $\mathcal{D}_f = [-1, 0]$. Par ailleurs, Arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ donc f est dérivable sur $] -1, 0[$ et :

$$\forall x \in] -1, 0[, \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - (2x+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-x - x^2}}$$

3. Par 2π -périodicité de la fonction sin sur $\mathbb{R}$, on a $\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi :

$$\alpha = \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

4. (a) Une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est $F : x \mapsto x \ln(x) - x$.

(b) Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $G : x \mapsto \frac{\sin(3x^2 + 1)}{6}$.

(c) Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $H : x \mapsto -\frac{1}{6(x^2 + 4)^3}$.

5. Posons :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sin(x) & v(x) &= x \\ u(x) &= -\cos(x) & v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

Par intégration par parties, on a :

$$I = \left[-x \cos(x) \right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x) \, dx = \pi - \underbrace{\left[-\sin(x) \right]_0^\pi}_{=0} = \pi$$

6. Par définition, $(H, \square)$ est un sous-groupe de $(G, \square)$ si :

$$\star \quad \forall h, k \in H, \quad h \square k \in H;$$

$$\star \quad \forall h \in H, \quad h^{-1} \in H.$$

7. (a) L'application $\varphi \in B^A$ est un morphisme de groupes si :

$$\forall a, a' \in A, \quad \varphi(a \star a') = \varphi(a) \perp \varphi(a')$$

(b) Le noyau de φ est $\text{Ker}(\varphi) = \{a \in A \mid \varphi(a) = e_B\}$.

Exercice 2 (calcul intégral).

1. (a) On a :

$$I_0 = \int_1^e \frac{1}{x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{I_0 = 1 - e^{-1}}$$

(b) Notons f cette fonction. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln(x))}{x^2} = -\frac{\ln(x)}{x^2}$$

On en déduit que :

$$I_1 = \left[-\frac{1 + \ln(x)}{x} \right]_1^e = 1 - \frac{2}{e}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{x^2} & v(x) &= \ln(x)^{n+1} \\ u(x) &= -\frac{1}{x} & v'(x) &= (n+1) \frac{\ln(x)^n}{x} \end{aligned}$$

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[-\frac{\ln(x)^{n+1}}{x} \right]_1^e - \int_1^e -(n+1) \frac{\ln(x)^n}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{e} + (n+1) \int_1^e \frac{\ln(x)^n}{x^2} dx \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = -e^{-1} + (n+1)I_n$$

(d) On utilise une récurrence simple.

★ On sait que $I_0 = 1 - e^{-1}$. De plus :

$$0! \left(1 - e^{-1} \times \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} \right) = 1 - e^{-1} = I_0$$

donc l'égalité est vérifiée au rang $n = 0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$I_n = n! \left(1 - e^{-1} \times \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$$

et montrons que :

$$I_{n+1} = (n+1)! \left(1 - e^{-1} \times \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \right)$$

En utilisant la question précédente puis l'hypothèse de récurrence, il vient :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= -e^{-1} + (n+1) \times n! \left(1 - e^{-1} \times \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) \\ &= -e^{-1} + (n+1)! \left(1 - e^{-1} \times \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) \\ &= (n+1)! \left(-\frac{e^{-1}}{(n+1)!} + 1 - e^{-1} \times \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) \\ &= (n+1)! \left(1 - e^{-1} \times \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \right) \end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence simple, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = n! \left(1 - e^{-1} \times \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

x	1	e
t	0	1

On a $x = e^t$ donc $dx = e^t dt$. Le théorème de changement de variable nous donne :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{e^{2t}} e^t dt$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $0 \leq e^{-t} \leq 1$ donc, en multipliant par $t^n \geq 0$, on obtient :

$$\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq t^n e^{-t} \leq t^n$$

La propriété de croissance de l'intégrale nous donne alors :

$$\int_0^1 0 dt \leq \underbrace{\int_0^1 t^n e^{-t} dt}_{=I_n} \leq \int_0^1 t^n dt$$

Or :

$$\int_0^1 0 dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

On a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

(c) Comme $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, le théorème des gendarmes et les inégalités obtenues à la question précédente permettent de conclure que :

$$\text{la suite } (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente de limite } 0$$

D'après la question 1.(d), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e - \frac{e}{n!} I_n$$

Or $\frac{e}{n!} I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ (produit de deux suites qui convergent vers 0) donc :

$$\text{la suite } \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente de limite } e$$

Exercice 3 (trigonométrie).

1. Comme $x \in]0, 4[$, on a $\frac{x}{2} \in]0, 2[$ puis $\frac{x}{2} - 1 \in]-1, 1[\subset [-1, 1]$. Comme la fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$, on peut conclure que :

$$\text{le nombre } \omega = \text{Arcsin} \left(\frac{x}{2} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \text{ est bien défini}$$

2. On sait que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = -\sin(\theta)$ donc, pour $\theta = \text{Arcsin} \left(\frac{x}{2} - 1 \right)$, on a :

$$\cos(\omega) = -\sin \left(\text{Arcsin} \left(\frac{x}{2} - 1 \right) \right) = 1 - \frac{x}{2},$$

car on sait que $\sin \circ \text{arcsin} = \text{Id}_{[-1, 1]}$.

3. (a) On sait que la fonction Arcsin est à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ donc :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \text{Arcsin} \left(\frac{x}{2} - 1 \right) \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{puis} \quad 0 \leq \omega \leq \pi \quad \text{et donc} \quad 0 \leq \frac{\omega}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

Comme les fonctions cos et sin sont à valeurs positives sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, on peut conclure que :

les nombres $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$ sont positifs ou nuls

(b) On sait que $\cos(\omega) = 2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - 1$ donc (en utilisant la question 2.) :

$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 = \frac{1 + \cos(\omega)}{2} = \frac{2 - \frac{x}{2}}{2} = \frac{4 - x}{4}$$

De plus, $\cos(\omega) = 1 - 2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)^2$ donc (toujours d'après la question 2.) :

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 = \frac{1 - \cos(\omega)}{2} = \frac{x}{4}$$

Comme $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \geq 0$ et $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \geq 0$ (question 3.(a)), on peut conclure que :

$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{4-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

4. Comme $x \in]0, 4[$, on a $\frac{\sqrt{4-x}}{2} \neq 0$, c'est-à-dire $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \neq 0$. D'après la question précédente, on a :

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}$$

Ainsi :

$$\text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) = \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}\right)$$

Or $\text{Arctan} \circ \tan = \text{Id}_{]-\pi/2, \pi/2[}$ et $\frac{\omega}{2} \in]-\pi/2, \pi/2[$ donc :

$$\frac{\omega}{2} = \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}\right) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{\omega = 2 \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}\right)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 4 (structure de groupe).

1. Montrons que $*$ est associative. Soient $a, b, c \in \mathbb{Q}$. On a :

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (a + b + kab) * c = a + b + kab + c + k(a + b + kab)c \\ &= a + b + c + kab + kac + kbc + k^2abc \end{aligned}$$

Le calcul de $a * (b * c)$ fournissant le même résultat, on peut conclure que :

la loi $*$ est associative

2. (a) Soit $a \in \mathbb{Q}$. On distingue deux cas.

★ **Premier cas :** $a = -1$

On a $-1 * 0 = -1$ et $-1 * 1 = -1$ mais $0 \neq -1$. Donc -1 n'est pas régulier dans $\mathbb{Q}$ pour la loi $*$.

★ **Deuxième cas :** $a \neq -1$

Soient $b, c \in \mathbb{Q}$. On a :

$$\begin{aligned} a * b = a * c &\iff a + b + ab = a + c + ac \iff b - c + ab - ac = 0 \\ &\iff b - c + a(b - c) = 0 \\ &\iff (b - c)(1 + a) = 0 \\ &\iff b - c = 0 \quad (\text{car } a \neq -1 \text{ par hypothèse}) \\ &\iff b = c \end{aligned}$$

Ainsi, a est régulier dans $\mathbb{Q}$ pour la loi $*$.

Finalement :

l'ensemble des éléments de $\mathbb{Q}$ qui sont réguliers pour la loi $*$ est $E = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

(b) Montrons que $(E, *)$ est un groupe abélien. Tout d'abord, E est non vide (il contient par exemple 0).

★ Pour tous $a, b \in E$, on a :

$$a * b + 1 = a + b + ab + 1 = (a + 1)(b + 1) \neq 0$$

car $a \neq -1$ et $b \neq -1$. Donc $a * b \neq -1$. Par ailleurs, $a * b \in \mathbb{Q}$ (car une somme et un produit de rationnels est un rationnel) donc $a * b \in E$. Par conséquent, $*$ est une loi de composition interne sur E .

★ On a vu à la question 1. que la loi $*$ est associative.

★ Pour tous $a, b \in E$, on a :

$$a * b = a + b + ab = b + a + ba = b * a$$

donc la loi $*$ est commutative.

★ On a $0 \in E$ et :

$$\forall a \in E, \quad a * 0 = a + 0 + a \times 0 = a$$

et on a aussi $0 * a = a$ (par commutativité de $*$). Donc $(E, *)$ admet 0 pour élément neutre.

★ Soit $a \in E$. Montrons que a est inversible dans $(E, *)$. Soit $b \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} a * b = b * a = 0 &\iff a * b = 0 \iff a + b + ab = 0 \iff b(1 + a) = -a \\ &\iff b = -\frac{a}{1 + a} \end{aligned}$$

car $a \neq -1$. Le quotient de deux rationnels est un rationnel donc $-\frac{a}{1 + a} \in \mathbb{Q}$. Ensuite, si $-\frac{a}{1 + a} = -1$, alors $-a = -1 - a$, c'est-à-dire $0 = -1$, ce qui est absurde. On en déduit que $-\frac{a}{1 + a} \neq -1$ et donc que $-\frac{a}{1 + a} \in E$. Finalement, a est inversible dans $(E, *)$ d'inverse $-\frac{a}{1 + a}$.

Ainsi :

$$\boxed{(E, *) \text{ est un groupe abélien}}$$

(c) Soit $a \in E$. On utilise un raisonnement par récurrence.

★ Par définition des puissances d'un élément dans un groupe, on a $a^{*0} = 0$ (élément neutre du groupe $(E, *)$) et $(a + 1)^0 - 1 = 1 - 1 = 0$. L'égalité est donc vraie pour $n = 0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a^{*n} = (a + 1)^n - 1$. Montrons que $a^{*(n+1)} = (a + 1)^{n+1} - 1$. On a :

$$\begin{aligned} a^{*(n+1)} &= a^{*n} * a = ((a + 1)^n - 1) * a \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= (a + 1)^n - 1 + a + ((a + 1)^n - 1)a \\ &= a(a + 1)^n + (a + 1)^n - 1 \\ &= (a + 1)^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a^{*n} = (a + 1)^n - 1}$$

Problème.

Partie I : résolution d'une équation différentielle du premier ordre

1. L'équation différentielle $(\mathcal{E})$ est linéaire du premier ordre et :

$$(\mathcal{E}) \iff y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \quad (\text{car } x > 0)$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $\ln$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\left\{ x \mapsto C e^{-\ln(x)} \mid C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \mapsto \frac{C}{x} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

Déterminons maintenant une solution particulière de $(\mathcal{E})$ en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soit $C \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et considérons la fonction $y : x \mapsto \frac{C(x)}{x}$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}$$

donc :

$$\begin{aligned} (y \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) &\iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{x^2} \right) \\ &\iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \right) \\ &\iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad C'(x) = \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

Par exemple, $C = \ln$ convient et donc une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $y : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$. On peut donc conclure que :

l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\left\{ x \mapsto \frac{\ln(x)}{x} + \frac{C}{x} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$

Partie II : résolution d'une équation différentielle du second ordre

2. (a) La fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction exponentielle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction g est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = e^t y'(e^t) \quad \text{et} \quad g''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$$

Or y est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 y''(x) - x y'(x) + y(x) = x$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme $x = e^t \in \mathbb{R}_+^*$, on en déduit que :

$$e^{2t} y''(e^t) - e^t y'(e^t) + y(e^t) = e^t$$

ce que l'on peut réécrire :

$$(e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t)) - 2e^t y'(e^t) + y(e^t) = e^t$$

Autrement dit :

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g''(t) - 2g'(t) + g(t) = e^t$

- (b) L'équation différentielle (E_2) est linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène $g'' - 2g' + g = 0$ est $x^2 - 2x + 1 = 0$, soit encore $(x - 1)^2 = 0$. Cette équation admet une racine double, à savoir 1. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc :

$$\left\{ t \mapsto (At + B) e^t \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Cherchons maintenant une solution particulière de (E_2) sur $\mathbb{R}$ sous la forme $g : t \mapsto \lambda t^2 e^t$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = 2\lambda t e^t + \lambda t^2 e^t \quad \text{et} \quad g''(t) = 2\lambda e^t + 4\lambda t e^t + \lambda t^2 e^t$$

donc :

$$\begin{aligned} (g \text{ est solution de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R}) &\iff (\forall t \in \mathbb{R}, \quad g''(t) - 2g'(t) + g(t) = e^t) \\ &\iff (\forall t \in \mathbb{R}, \quad 2\lambda e^t + 4\lambda t e^t + \lambda t^2 e^t - 2(2\lambda t e^t + \lambda t^2 e^t) + \lambda t^2 e^t = e^t) \\ &\iff 2\lambda = 1 \quad (\text{car } e^t \neq 0) \\ &\iff \lambda = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E_2) sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $t \mapsto \frac{t^2}{2} e^t$. Finalement :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \left\{ t \mapsto (At + B)e^t + \frac{t^2}{2}e^t \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}}$$

- (c) On a montré que, si y est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$, alors la fonction $g : t \mapsto y(e^t)$ est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$. On a donc :

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(e^t) = (At + B)e^t + \frac{t^2}{2}e^t$$

et donc :

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = g(\ln(x)) = (A \ln(x) + B)x + x \frac{\ln(x)^2}{2}$$

Ceci montre, en notant $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on a l'inclusion :

$$\mathcal{S} \subset \left\{ x \mapsto (A \ln(x) + B)x + x \frac{\ln(x)^2}{2} \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Réciproquement, on montre que tout élément de l'ensemble de droite est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$ (exercice). Finalement :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est } \mathcal{S} = \left\{ x \mapsto (A \ln(x) + B)x + x \frac{\ln(x)^2}{2} \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}}$$

3. (a) Comme y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont. De plus (comme $y : x \mapsto xz(x)$) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) = z(x) + xz'(x) \quad \text{et} \quad y''(x) = 2z'(x) + xz''(x)$$

donc :

$$\begin{aligned} (y \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) &\iff (\forall x > 0, \quad x^2 y''(x) - x y'(x) + y(x) = x) \\ &\iff (\forall x > 0, \quad x^2 (2z'(x) + xz''(x)) - x(z(x) + xz'(x)) + xz(x) = x) \\ &\iff (\forall x > 0, \quad x^3 z''(x) + x^2 z'(x) = x) \\ &\iff (\forall x > 0, \quad x^2 z''(x) + xz'(x) = 1) \quad \text{car } x \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{y \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ si et seulement si } x^2 z'' + xz' = 1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$$

- (b) Posons $Z = z'$. L'équation différentielle (E_3) se réécrit :

$$x^2 Z' + xZ = 1 \tag{\mathcal{E}}$$

Les solutions de (E_3) sont donc les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$, dont l'ensemble des solutions a été obtenu à la question 1. On en déduit que :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est } \left\{ x \mapsto \frac{\ln(x)^2}{2} + C \ln(x) + D \mid C, D \in \mathbb{R} \right\}}$$

- (c) En utilisant le changement de variable permettant d'obtenir y à partir de z , on obtient que :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est } \left\{ x \mapsto \frac{x \ln(x)^2}{2} + Cx \ln(x) + Dx \mid C, D \in \mathbb{R} \right\}}$$

On retrouve bien l'ensemble de solutions obtenu à la question 2.

Partie III : une équation fonctionnelle

4. (a) Le choix $x = y = 0$ fournit immédiatement :

$$\boxed{f(0) = 0}$$

Pour $x = y = 1$, on a $f(1) = f(1) + f(1)$ donc :

$$\boxed{f(1) = 0}$$

Enfin, pour $x = y = -1$, on a $f(1) = -f(-1) - f(-1)$ et donc :

$$\boxed{f(-1) = 0}$$

(b) Tout d'abord, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a pour $y = -1$:

$$f(-x) = xf(-1) - f(x) = -f(x)$$

car $f(-1) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi :

la fonction f est impaire sur $\mathbb{R}$

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a (en dérivant par rapport à y) :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad xf'(xy) = xf'(y) + f(x)$$

En choisissant la valeur $y = 1$, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xf'(x) - f(x) = f'(1)x$$

(b) L'équation différentielle vérifiée par f est linéaire du premier ordre. Une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $-\ln$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène $xy' - y = 0$ est :

$$\left\{ x \mapsto C e^{\ln(x)} \mid C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \mapsto Cx \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

Déterminons maintenant une solution particulière de l'équation différentielle $xy' - y = kx$ (notée (E)) sur $\mathbb{R}_+^*$ en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soit $C : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $y : x \mapsto C(x)x$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall x > 0, \quad y'(x) = C'(x)x + C(x)$$

donc :

$$\begin{aligned} (y \text{ est solution de (E) sur } \mathbb{R}_+^*) &\iff (\forall x > 0, \quad xy'(x) - y(x) = kx) \\ &\iff (\forall x > 0, \quad C'(x)x^2 = kx) \\ &\iff (\forall x > 0, \quad C'(x) = \frac{k}{x}) \text{ car } x \neq 0 \end{aligned}$$

Par exemple, $C : x \mapsto k \ln(x)$ convient. Une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc la fonction $y : x \mapsto kx \ln(x)$. Finalement, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\left\{ x \mapsto kx \ln(x) + Cx \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

Finalement :

il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto kx \ln(x) + Cx$

Comme $f \in \mathcal{S}$, on sait d'après la question 7.(a) que $f(1) = 0$ donc $C = 0$. Comme f est impaire, on a nécessairement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad f(x) = kx \ln(-x)$$

Comme on sait aussi que $f(0) = 0$, on peut conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} kx \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

6. On a montré que, si $f \in \mathcal{S}$, alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} kx \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Réciproquement, soit $k \in \mathbb{R}$. Alors la fonction f (définie ci-dessus) est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (comme produit de fonctions qui le sont, puisque les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(|x|)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ respectivement). Par ailleurs, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$, on a $xy \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} f(xy) &= kxy \ln(|xy|) = kxy(\ln(|x|) + \ln(|y|)) = x \times ky \ln(|y|) + y \times kx \ln(|x|) \\ &= xf(y) + yf(x) \end{aligned}$$

Par ailleurs, si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $f(xy) = f(0) = 0$, et les nombres $xf(y)$ et $yf(x)$ sont également nuls. Donc l'égalité est encore vérifiée dans ce cas. Autrement dit, $f \in \mathcal{S}$. On peut donc conclure que :

($\mathcal{S}$) est l'ensemble constitué des fonctions de la forme :

$$f : x \mapsto \begin{cases} kx \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$