Devoir Surveillé 4

durée de l'épreuve : 4h

- *La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir.*
- *Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.*
- *La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Le sujet est composé de deux exercices et de deux problèmes indépendants.

Exercice 1 (calcul intégral).

Les questions 1., 2. *et* 3. *de cet exercice sont indépendantes.*

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler les trois formules de duplication de $\cos(2x)$.

   (b) En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto \sin(x)^2$.

2. En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln(x) \, \mathrm{d}x$$

3. Le but de cette question est de calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(x)} \, \mathrm{d}x$.

   (a) Calculer l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2} \, \mathrm{d}t$.

   (b) Montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},$$

   où l'on a posé $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

   (c) Calculer l'intégrale J en effectuant le changement de variable $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Exercice 2 (solutions d'une équation différentielle non linéaire).

On considère l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$y'(t) - \frac{y(t)}{t} = -\frac{y(t)^2}{t^2} \tag{E}$$

On cherche les fonctions y solutions de (E) sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$ et qui ne s'annulent pas sur I. On notera $\mathscr{S}_E$ l'ensemble de ces fonctions, *i.e.* :

$$\mathscr{S}_E = \left\{ y \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R}) \;\middle|\; \left(\forall t \in I,\ y'(t) - \frac{y(t)}{t} = -\frac{y(t)^2}{t^2} \right) \text{ et } (\forall t \in I,\ y(t) \neq 0) \right\}$$

1. Soit $y \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ une solution de (E) sur I qui ne s'annule pas. On pose $z = \dfrac{1}{y}$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall t \in I, \qquad z'(t) + \frac{z(t)}{t} = \frac{1}{t^2} \tag{F}$$
   (b) Résoudre l'équation différentielle (F) sur l'intervalle I.
   (c) Soient $C \in \mathbb{R}$ et la fonction $z_C : t \longmapsto \dfrac{C + \ln(t)}{t}$.
      i. Montrer que la fonction z_C ne s'annule pas sur I si et seulement si $C \geqslant 0$.
      ii. Soit $C \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $y_C : t \longmapsto \dfrac{t}{C + \ln(t)}$ est solution de (E) sur I.
2. En déduire l'ensemble $\mathscr{S}_E$.

Problème 1 (résolution d'une équation différentielle du second ordre).

Soit $g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dans ce problème, on veut déterminer toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) - y(x) = g(x) \tag{E_g}$$

Partie I : étude de deux cas particuliers

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :
$$y'' - y = x^2 + x + 1 \tag{E_1}$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :
$$y'' - y = \mathrm{e}^x \tag{E_2}$$

Partie II : étude du cas général

On se place maintenant dans le cas général : on considère une fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *quelconque* qu'on suppose continue sur $\mathbb{R}$. On souhaite résoudre l'équation différentielle (E_g) ci-dessus.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^x \mathrm{sh}(x - t) g(t) \,\mathrm{d}t$$

On rappelle que les fonctions cosinus et sinus hyperboliques sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh} = \mathrm{ch}'$$

Par ailleurs, on rappelle la propriété de linéarité de l'intégrale : si $u, v \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et si $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad \int_a^b (\lambda u(t) + \mu v(t)) \,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b u(t) \,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b v(t) \,\mathrm{d}t$$

3. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$$

   (b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = 1$$

4. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \operatorname{sh}(x)\int_0^x \operatorname{ch}(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \operatorname{ch}(x)\int_0^x \operatorname{sh}(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

5. Justifier alors que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

6. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f est solution de l'équation différentielle (E_g), *i.e.* que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) - f(x) = g(x)$$

7. Conclure quant à l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_g) sur $\mathbb{R}$.

Problème 2 (l'équation de Pell-Fermat).

On considère l'équation suivante (appelée équation de Pell-Fermat) :

$$a^2 - 2b^2 = 1,$$

d'inconnue $(a, b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Nous allons nous intéresser dans un premier temps à la structure algébrique de l'ensemble des solutions de cette équation. On note alors G l'ensemble des solutions de cette équation, *i.e.* :

$$G = \left\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\middle|\, a^2 - 2b^2 = 1\right\}$$

On définit sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une opération notée $\star$ et définie par :

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \qquad (a, b) \star (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$$

Partie I : étude de $(G, \star)$

1. (a) Montrer que :

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \qquad (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 = (a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2)$$

   (b) En déduire que $\star$ est une loi de composition interne sur G.

2. Montrer que la loi $\star$ est commutative et associative dans G.
3. Montrer que $(G, \star)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.
4. Montrer que :

$$\forall (a, b) \in G, \qquad (a, b) \star (a, -b) = (1, 0)$$

5. Conclure que $(G, \star)$ est un groupe abélien.

Partie II : étude des itérés d'un élément de G

6. (a) Déterminer les éléments de G de la forme $(1, b)$ où $b \in \mathbb{Z}$.
   (b) Déterminer les éléments de G de la forme $(2, b)$ où $b \in \mathbb{Z}$.
7. On pose $x = (3, 2)$. Justifier que $x \in G$.

Pour tout entier naturel n, on note x^n la puissance n^{e} de x dans le groupe $(G, \star)$. On rappelle que :

$$x^0 = (1, 0) \qquad \text{et} \qquad (\forall n \in \mathbb{N},\ x^{n+1} = x^n \star x)$$

Pour tout entier naturel n, comme x^n appartient à G, on note $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le couple d'entiers tels que $x^n = (a_n, b_n)$.

8. Justifier que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 3a_n + 4b_n \\ b_{n+1} & = & 2a_n + 3b_n \end{array} \right.$$

   Indication : il n'est pas nécessaire de faire une récurrence ici.

9. En utilisant ces deux relations de récurrence, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n$$

   Indication : il n'est pas nécessaire de faire une récurrence ici.

10. Montrer enfin que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n}{2}$$

– FIN DE L'ÉPREUVE –