Devoir Surveillé 3

durée de l'épreuve : 4h

- *La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir.*
- *Les résultats non encadrés à la* ***règle*** *ne seront pas pris en compte dans la notation.*
- *La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Le sujet est composé de quatre exercices et d'un problème, tous indépendants les uns des autres.

Exercice 1 (apéritif).

Les questions de cet exercice sont indépendantes.
On rappelle que, lorsqu'il s'agit d'énoncer une formule, il est important de la quantifier, i.e. d'introduire la ou les variables concernées.

1. Soient E et F deux ensembles non vides et $f \in F^E$.
   (a) Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Définir l'image directe $f(A)$ de l'ensemble A par l'application f.
   (b) Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Définir l'image réciproque $f^{-1}(B)$ de l'ensemble B par l'application f.
   (c) Donner la définition de « f est injective ».
2. Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner la définition de « α est le maximum de A ».
3. Résoudre l'inéquation $|2x+3| > 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
4. Énoncer :
   (a) les formules d'Euler ;
   (b) la formule du binôme de Newton ;
   (c) les deux formes de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.
5. Soient a et b deux nombres complexes de module 1 tels que $a \neq b$. Montrer que le nombre complexe $z = \dfrac{1+ab}{a-b}$ est un imaginaire pur.
6. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^z = i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
7. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
   (a) Écrire en compréhension l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n^{e} de l'unité.
   (b) Démontrer que $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$.
8. Soient $p, q \in \mathbb{R}$. Retrouver la formule donnant la forme factorisée de $\sin(p) - \sin(q)$. *Une démonstration est attendue.*
9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser le nombre $x = \cos(\theta)^3$.

10. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin(x)^3$$

Exercice 2 (résolution de deux équations dans $\mathbb{C}$).

Les deux questions cet exercice sont indépendantes.

1. *Résolution d'une équation du second degré.*
   (a) Déterminer les racines carrées complexes de $\lambda = 5 - 12i$.
   (b) En déduire les solutions complexes de l'équation du second degré $z^2 - (1+4i)z + 5i - 5 = 0$.
2. *Résolution d'une équation de degré* 8.
   On considère l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$$z^8 + 4z^4 + 16 = 0 \qquad (*)$$
   (a) i. Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $a = -2 + 2i\sqrt{3}$.
   ii. En déduire les solutions de l'équation $z^4 = a$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   (b) i. Résoudre l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.
   ii. Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $(*)$.

Exercice 3 (calcul d'une somme).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\sigma_{m,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km}$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :
$$S(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (z + \omega^k)^n$$
   (a) Montrer que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad S(z) = n(z^n + 1)$$
   (b) Calculer $S\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}\right)$.
   (c) En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)^n = 0$$

Exercice 4 (étude d'une fonction).

On considère la fonction f d'expression :

$$f(x) = \sqrt{x - 1 - \sqrt{3x - 5}}$$

1. (a) Résoudre l'inéquation $x - 1 \geqslant \sqrt{3x - 5}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Justifier que le domaine de définition de f est $\mathscr{D}_f = \left[\frac{5}{3}, 2\right] \cup [3, +\infty[$.
2. Déterminer le sens de variation de f sur son domaine de définition et dresser le tableau de variations de f.

Problème (étude d'une application).

Les différentes parties de ce problème sont indépendantes.

On considère la fonction f ci-dessous :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + \dfrac{1}{z} \end{array} \right.$$

Partie I – Étude de la fonction f

1. Déterminer les antécédents éventuels du nombre complexe i par l'application f.
2. L'application f est-elle injective ?
3. Démontrer que f est surjective.
4. Montrer que $f(\mathbb{U}) = [-2, 2]$.
5. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*$.
6. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$
7. On note $\mathbb{D}^*$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.
   (a) Montrer que $f(\mathbb{D}^*) \subset \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.
   (b) Montrer que tout élément de $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ admet exactement deux antécédents par l'application f dans $\mathbb{C}^*$. Que vaut le produit de ces deux antécédents ?
   (c) Montrer que l'application f induit une bijection de $\mathbb{D}^*$ sur $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.

Partie II – Une suite d'applications

On définit une suite d'applications $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (chaque fonction φ_n est définie sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$) par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \varphi_0(z) = 2 \qquad \text{et} \qquad \varphi_1(z) = z$$

et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}, \qquad \varphi_{n+2}(z) = z\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)$$

8. Donner les expressions des fonctions φ_2, φ_3 et φ_4.
9. En déduire les solutions des équations $\varphi_2(z) = 0$ puis $\varphi_3(z) = 0$ puis $\varphi_4(z) = 0$ d'inconnues $z \in \mathbb{C}$.
10. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^*, \qquad \varphi_n(f(z)) = f(z^n)$$
11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    (a) Résoudre l'équation $f(z^n) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$.
    (b) En déduire les solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

– FIN DE L'ÉPREUVE –