# Devoir Surveillé 3

*un corrigé*

---

## Exercice 1 (apéritif).

1. (a) On a :

$$\boxed{f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}}$$

(b) On a :

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}}$$

(c) La fonction $f$ est injective si et seulement si :

$$\boxed{\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \implies x = y}$$

2. On dit que $\alpha$ est le maximum de $A$ si :

$$\boxed{\alpha \in A \qquad \text{et} \qquad (\forall a \in A,\ a \leqslant \alpha)}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$|2x+3| > 1 \iff 2x+3 < -1 \text{ ou } 2x+3 > 1 \iff x < -2 \text{ ou } x > -1$$

Donc :

$$\boxed{\text{l'ensemble de solutions cherché est } ]-\infty, -2[ \cup ]-1, +\infty[}$$

4. (a) On a :

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

(b) On a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a, b \in \mathbb{C}, \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

(c) On a :

$$\boxed{\forall z, w \in \mathbb{C}, \qquad \big||z| - |w|\big| \leqslant |z+w| \leqslant |z| + |w|}$$

5. Comme $a$ et $b$ sont des nombres complexes de module 1, on a $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$ et $\overline{b} = \dfrac{1}{b}$ donc (en utilisant les propriétés de la conjugaison) :

$$\begin{aligned}\overline{z} = \overline{\left(\frac{1+ab}{a-b}\right)} = \frac{\overline{1+ab}}{\overline{a-b}} = \frac{1+\overline{a}\,\overline{b}}{\overline{a}-\overline{b}} = \frac{1+\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} &= \frac{\frac{ab+1}{ab}}{\frac{b-a}{ab}} \\ &= \frac{1+ab}{b-a} \\ &= -z\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\text{le nombre complexe } z \text{ est un imaginaire pur}}$$

6. On a $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad e^z = i \iff e^z = e^{i\frac{\pi}{2}} \iff z \equiv i\frac{\pi}{2}\ [2i\pi]$$

donc :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions cherché est } i\frac{\pi}{2}+2i\pi\mathbb{Z}}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
   (a) On sait que :
   $$\boxed{\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\,i\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![0, n-1]\!] \right\}}$$
   (b) Comme $n \geqslant 2$, on a $\dfrac{2\pi}{n} \in ]0,\pi]$ donc $\mathrm{e}^{\,i\frac{2\pi}{n}} \neq 1$. Ainsi (en utilisant la description de $\mathbb{U}_n$, la formule de Moivre, ainsi que la somme des termes d'une suite géométrique) :
   $$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\,i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \frac{1-\left(\mathrm{e}^{\,i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{\,i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1-\mathrm{e}^{\,2i\pi}}{1-\mathrm{e}^{\,i\frac{2\pi}{n}}},$$
   et comme $\mathrm{e}^{\,2i\pi}=1$, on a bien :
   $$\boxed{\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0}$$

8. Soient $p, q \in \mathbb{R}$. Par $\mathbb{R}$-linéarité de la partie imaginaire, on a :
   $$\sin(p)-\sin(q) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\,ip}) - \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\,iq}) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\,ip}-\mathrm{e}^{\,iq})$$
   Or :
   $$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\,ip}-\mathrm{e}^{\,iq} &= \mathrm{e}^{\,i\frac{p+q}{2}}\left(\mathrm{e}^{\,i\frac{p-q}{2}} - \mathrm{e}^{\,-i\frac{p-q}{2}}\right) \\ &= 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\mathrm{e}^{\,i\frac{p+q}{2}} \qquad \text{(formule d'Euler)} \\ &= -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \end{aligned}$$
   Par conséquent :
   $$\boxed{\sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a (en utilisant les formules d'Euler et du binôme de Newton) :
   $$\begin{aligned} x = \left(\frac{\mathrm{e}^{\,i\theta}+\mathrm{e}^{\,-i\theta}}{2}\right)^3 &= \frac{(\mathrm{e}^{\,i\theta}+\mathrm{e}^{\,-i\theta})^3}{8} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\,3i\theta}+\mathrm{e}^{\,-3i\theta}+3(\mathrm{e}^{\,i\theta}+\mathrm{e}^{\,-i\theta})}{8} \\ &= \frac{2\cos(3\theta)+6\cos(\theta)}{8} \end{aligned}$$
   Ainsi :
   $$\boxed{x = \frac{\cos(3\theta)}{4} + \frac{3\cos(\theta)}{4}}$$

10. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\sin(3x) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{\,3ix}\big) = \mathrm{Im}\Big(\big(\mathrm{e}^{\,ix}\big)^3\Big) = \mathrm{Im}\Big(\big(\cos(x)+i\sin(x)\big)^3\Big)$$
   En utilisant la formule du binôme de Newton, on a :
   $$(\cos(x)+i\sin(x))^3 = \cos(x)^3 - 3\cos(x)\sin(x)^2 + i\big(3\cos(x)^2\sin(x) - \sin(x)^3\big)$$
   donc :
   $$\sin(3x) = 3\cos(x)^2\sin(x) - \sin(x)^3 = 3\big(1-\sin(x)^2\big)\sin(x) - \sin(x)^3$$
   d'où :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin(x)^3}$$

## Exercice 2 (résolution de deux équations dans $\mathbb{C}$).

1. *Résolution d'une équation du second degré.*
   (a) Soit $a = X + iY \in \mathbb{C}$, où $X, Y \in \mathbb{R}$. On résout :

$$a^2 = \lambda \iff \begin{cases} a^2 = \lambda \\ |a|^2 = |\lambda| \end{cases} \iff \begin{cases} X^2 - Y^2 = 5 \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{169} = 13 \\ 2XY = -12 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} X^2 = 9 \\ Y^2 = 4 \\ 2XY = -12 \end{cases}$$
$$\iff (X = 3 \text{ et } Y = -2) \text{ ou } (X = -3 \text{ et } Y = 2)$$

   Ainsi :

$$\boxed{\text{les racines carrées de } \lambda \text{ sont } 3 - 2i \text{ et } -3 + 2i}$$

   (b) Le discriminant $\Delta$ de l'équation du second degré proposé vaut :

$$\Delta = (1 + 4i)^2 - 4(5i - 5) = -15 + 8i - 20i + 20 = \lambda$$

   Un racine carrée de $\lambda$ étant $3 - 2i$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{les solutions de cette équation sont } \frac{1 + 4i - (3 - 2i)}{2} = -1 + 3i \text{ et } 2 + i}$$

2. *Résolution d'une équation de degré* 8.
   (a) i. La forme trigonométrique de $a$ est :

$$\boxed{a = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\,\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}}$$

   ii. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$z^4 = a \iff z^4 = \left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4 \iff \left(\frac{z}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^4 = 1 \iff \frac{z}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}} \in \mathbb{U}_4$$

   Or on sait que $\mathbb{U}_4 = \big\{-1, 1, -i, i\big\}$ donc :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions dans } \mathbb{C} \text{ de l'équation } z^4 = a \text{ est } \Big\{-\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}, \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}, -i\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}, i\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}\Big\}}$$

   (b) i. Le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta = -48 = \left(4i\sqrt{3}\right)^2$. Ainsi :

$$\boxed{\text{les solutions de l'équation sont } \frac{-4 + 4i\sqrt{3}}{2} = a \text{ et } -2 - 2i\sqrt{3}}$$

   ii. Soit $z \in \mathbb{C}$. En posant $Z = z^4$, on a :

$$z^8 + 4z^4 + 16 = 0 \iff Z^2 + 4Z + 16 = 0 \iff Z = a \text{ ou } Z = -2 - 2i\sqrt{3}$$
$$\iff z^4 = a \text{ ou } z^4 = -2 - 2i\sqrt{3}$$

   L'équation $z^4 = a$ a été résolue à la question précédente. La résolution de $z^4 = -2-2i\sqrt{3}$ se traite de manière analogue (la forme trigonométrique de $-2 - 2i\sqrt{3}$ est $4\,\mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{3}}$). Ainsi, l'ensemble des solutions de $(*)$ est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \Big\{-\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}, \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}, -i\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}, i\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}, -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}, \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}, -i\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}, i\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}\Big\}}$$

# Exercice 3 (calcul d'une somme).

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. On distingue deux cas.

   ⋆ **Premier cas :** $m$ est un multiple de $n$
   Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $m = pn$. On a d'après la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} \sigma_{m,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kpn} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2ikp\pi} &= \sum_{k=0}^{n-1} 1 \qquad (\text{car } \mathrm{e}^{2ikp\pi} = 1 \text{ car } kp \in \mathbb{Z}) \\ &= n \end{aligned}$$

   ⋆ **Premier cas :** $m$ n'est pas un multiple de $n$
   Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\omega^{km} = \left(\omega^m\right)^k = \left(\mathrm{e}^{\frac{2im\pi}{n}}\right)^k$$

   Or $m$ n'est pas un multiple de $n$ donc $\dfrac{2m\pi}{n}$ n'est pas un multiple de $2\pi$. Par conséquent, $\mathrm{e}^{\frac{2im\pi}{n}} \neq 1$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned} \sigma_{m,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2im\pi}{n}}\right)^k = \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\frac{2im\pi}{n}}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\frac{2im\pi}{n}}} &= \frac{1 - \mathrm{e}^{2im\pi}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{2im\pi}{n}}} \qquad (\text{formule de Moivre}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   car $\mathrm{e}^{2im\pi} = 1$. Finalement [1] :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, \qquad \sigma_{m,n} = \begin{cases} n & \text{si } n \mid m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^k + z)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} z^{n-m} \omega^{km} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} z^{n-m} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km}}_{=\sigma_{m,n}}$$

   Dans l'intervalle $[\![0, n]\!]$, les seuls multiples de $n$ sont 0 et $n$ donc :

$$\begin{aligned} S(z) &= \binom{n}{0} z^n \sigma_{0,n} + \underbrace{\sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} z^{n-m} \underbrace{\sigma_{m,n}}_{=0}}_{=0} + \binom{n}{n} z^0 \sigma_{n,n} \\ &= nz^n + n \end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \qquad S(z) = n(z^n + 1)}$$

   (b) En utilisant la question 3. et la formule de Moivre, on a :

$$S\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}\right) = n\big(\mathrm{e}^{i\pi} + 1\big)$$

   Or $\mathrm{e}^{i\pi} = -1$ donc :

$$\boxed{S\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}\right) = 0}$$

1. Si $a$ et $b$ sont des entiers relatifs, dire que $a$ divise $b$ se note $a \mid b$.

En utilisant l'expression de $S$ sous forme de somme, on a :

$$\begin{aligned}
S\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}+\omega^k\right)^n &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}+\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n && \text{(formule de Moivre)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathrm{e}^{\frac{i(2k+1)\pi}{2n}}\left(\mathrm{e}^{\frac{i(2k-1)\pi}{2n}}+\mathrm{e}^{-\frac{i(2k-1)\pi}{2n}}\right)\right]^n && \text{(angle moitié)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{i(2k+1)\pi}{2}}\times 2^n\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)^n && \text{(formule d'Euler)}\\
&= 2^n\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}}_{=i}\times\underbrace{\left(\mathrm{e}^{i\pi}\right)^k}_{=(-1)^k}\times\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)^n\\
&= i2^n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)^n
\end{aligned}$$

On a $S\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}\right)=0$ et $i2^n\neq 0$ donc, par intégrité de $\mathbb{C}$, on a bien :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)^n=0}$$

## Exercice 4 (étude d'une fonction).

1. (a) Le domaine de validité de l'inéquation est $\left[\frac{5}{3},+\infty\right[$ (puisque la fonction $t\longmapsto\sqrt{t}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$).

Soit $x\in\left[\frac{5}{3},+\infty\right[$. Alors $x-1,\sqrt{3x-5}\in\mathbb{R}_+$ et la fonction $t\longmapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\begin{aligned}
x-1\geqslant\sqrt{3x-5} \iff (x-1)^2\geqslant 3x-5 &\iff x^2-5x+6\geqslant 0\\
&\iff x\in\left]-\infty,2\right]\cup\left[3,+\infty\right[
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'inéquation est }\left[\frac{5}{3},+\infty\right[\cap\left(\left]-\infty,2\right]\cup\left[3,+\infty\right[\right)=\left[\frac{5}{3},2\right]\cup\left[3,+\infty\right[}$$

(b) Soit $x\in\mathbb{R}$. Comme la fonction $t\longmapsto\sqrt{t}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$x\in\mathscr{D}_f\iff\left\{\begin{array}{c}3x-5\geqslant 0\\ x-1-\sqrt{3x-5}\geqslant 0\end{array}\right.$$

Autrement dit, le domaine de définition de $f$ est égal à l'ensemble des solutions de l'inéquation précédente, *i.e.* :

$$\boxed{\mathscr{D}_f=\left[\frac{5}{3},2\right]\cup\left[3,+\infty\right[}$$

2. La fonction $t\longmapsto\sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $f$ est dérivable sur $\left]\frac{5}{3},2\right[\cup\left]3,+\infty\right[$ et :

$$\forall x\in\left]\frac{5}{3},2\right[\cup\left]3,+\infty\right[,\qquad f'(x)=\frac{1-\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}}{2\sqrt{x-1-\sqrt{3x-5}}}=\frac{2\sqrt{3x-5}-3}{4\sqrt{3x-5}\sqrt{x-1-\sqrt{3x-5}}}$$

Le dénominateur est clairement positif donc, pour tout $x\in\left]\frac{5}{3},2\right[\cup\left]3,+\infty\right[$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x)\geqslant 0\iff 2\sqrt{3x-5}-3\geqslant 0\iff\sqrt{3x-5}\geqslant\frac{3}{2} &\iff 3x-5\geqslant\frac{9}{4} \qquad (*)\\
&\iff x\geqslant\frac{29}{12}
\end{aligned}$$

en exploitant, pour la dernière équivalence de $(*)$, la stricte croissance de la fonction $t\longmapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$ (appliquée aux nombres positifs $\sqrt{3x-5}$ et $\frac{3}{2}$). En remarquant que $2<\frac{29}{12}<3$, on obtient le tableau de variations de $f$ suivant :

| $x$ | $\frac{5}{3}$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $\sqrt{\frac{2}{3}}$ | $\searrow$ | $0$ | | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

# Problème (étude d'une application).

## Partie I – Étude de la fonction $f$

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On résout :

$$f(z) = i \iff z + \frac{1}{z} = i \iff z^2 + 1 = iz \iff z^2 - iz + 1 = 0$$

En résolvant cette équation du second degré (de discriminant $-5$), on conclut que :

$$\boxed{\text{les antécédents de } i \text{ par l'application } f \text{ dans } \mathbb{C}^* \text{ sont } i\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

2. Comme $i$ admet deux antécédents distincts par l'application $f$ dans $\mathbb{C}^*$, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{l'application } f \text{ n'est pas injective}}$$

3. Soient $w \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}^*$. On a :

$$f(z) = w \iff z + \frac{1}{z} = w \iff z^2 - wz + 1 = 0$$

On sait que toute équation du second degré à coefficients complexes admet au moins une solution dans $\mathbb{C}$. Une solution de cette équation du second degré ne peut pas être nulle (en effet, $0^2 - w \times 0 + 1 = 1 \neq 0$). Par conséquent, le nombre complexe $w$ admet au moins un antécédent dans $\mathbb{C}^*$ par l'application $f$. Ainsi :

$$\boxed{\text{l'application } f \text{ est surjective}}$$

4. Sachant que $\mathbb{U} = \left\{ \mathrm{e}^{i\theta} \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\mathbb{U}) = \left\{ f(z) \,\middle|\, z \in \mathbb{U} \right\} &= \left\{ f(\mathrm{e}^{i\theta}) \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta} \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ 2\cos(\theta) \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Or $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ donc on peut conclure que :

$$\boxed{f(\mathbb{U}) = [-2, 2]}$$

5. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a :

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(\mathbb{R}) \iff f(z) \in \mathbb{R} &\iff \overline{f(z)} = f(z) \\ &\iff \overline{\left( z + \frac{1}{z} \right)} = z + \frac{1}{z} \\ &\iff \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} = z + \frac{1}{z} \\ &\iff \overline{z} - z + \frac{z - \overline{z}}{\overline{z}\, z} = 0 \\ &\iff \left( \overline{z} - z \right) \left( 1 - \frac{1}{|z|^2} \right) = 0 \\ &\iff \overline{z} = z \text{ ou } |z|^2 = 1 \\ &\iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } |z| = 1 \end{aligned}$$

car un module est positif. Par conséquent :

$$\boxed{f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^* \cap (\mathbb{R} \cup \mathbb{U}) = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}}$$

6. La fonction $\varphi : x \longmapsto x + \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \varphi(x) \geqslant 0 \iff 1 - \frac{1}{x^2} \geqslant 0 \iff \frac{x^2-1}{x^2} \geqslant 0 \iff (x-1)(x+1) \geqslant 0$$
$$\iff x \in ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

On en déduit le tableau de variations de $\varphi$ suivant (les limites sont immédiates) :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-2$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $-\infty$ |

Par conséquent :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \varphi(x) \in ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[}$$

7. (a) Soit $w \in f(\mathbb{D}^*)$. Il existe $z \in \mathbb{D}^*$ tel que $w = f(z)$. Par l'absurde, supposons que $w \in [-2, 2]$. En particulier, $f(z) \in \mathbb{R}$, *i.e.* $z \in f^{-1}(\mathbb{R})$. D'après la question 5., on a $z \in \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*$. Or $0 < |z| < 1$ donc $z \notin \mathbb{U}$ ce qui implique que $z \in \mathbb{R}$. La question 6. nous permet de conclure que $w = f(z)$ appartient à l'ensemble $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. Or $w \in [-2, 2]$ donc $w = -2$ ou $w = 2$. La résolution de l'équation $f(z) = \pm 2$ (*i.e.* $z^2 \pm 2z + 1 = 0$) nous donne $z = \pm 1$. Comme $-1$ et $1$ n'appartiennent pas à $\mathbb{D}^*$, on obtient une absurdité. Par conséquent :

$$\boxed{f(\mathbb{D}^*) \subset \mathbb{C} \setminus [-2, 2]}$$

(b) Soit $w \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. On sait que $w$ admet au moins un antécédent par $f$ dans $\mathbb{C}^*$ (en effet, on sait que $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ est surjective d'après la question 3.). Un antécédent $z \in \mathbb{C}^*$ de $w$ est solution de l'équation de second degré $X^2 - wX + 1 = 0$. Si $w$ a un seul antécédent, alors le discriminant $w^2 - 4$ est égal à 0 et donc $w \in \{-2, 2\}$, ce qui est exclu. Ainsi :

$$\boxed{\text{$w$ admet exactement deux antécédents par $f$ dans $\mathbb{C}^*$ et le produit des antécédents vaut 1 (relation coefficients-racines)}}$$

(c) Soit $w \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. On sait que $w$ admet deux antécédents (distincts) $z$ et $z'$ dans $\mathbb{C}^*$. De plus, $zz' = 1$ ce qui implique que $|z|\,|z'| = 1$.

— Si $|z| = 1$, alors $z \in \mathbb{U}$ et l'égalité $zz' = 1$ implique que $z' = \overline{z}$. D'après les relations coefficients-racines :

$$z + z' = z + \overline{z} = -w \qquad \text{et donc} \qquad w = -2\,\mathrm{Re}(z) \in [-2, 2] \qquad \text{car} \qquad z \in \mathbb{U},$$

ce qui est absurde.

— On en déduit que $|z| < 1$ ou $|z| > 1$. Comme $|z|\,|z'| = 1$, un et un seul des deux nombres complexes $z$ ou $z'$ appartient à $\mathbb{D}^*$.

Ainsi, $w$ admet un unique antécédent par $f$ dans $\mathbb{D}^*$. Finalement :

$$\boxed{\text{l'application $f$ induit une bijection de $\mathbb{D}^*$ sur $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$}}$$

## Partie II – Une suite d'applications

8. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\boxed{\varphi_2(z) = z\varphi_1(z) - \varphi_0(z) = z^2 - 2, \qquad \varphi_3(z) = z\varphi_2(z) - \varphi_1(z) = z^3 - 3z}$$

et :

$$\boxed{\varphi_4(z) = z\varphi_3(z) - \varphi_2(z) = z^4 - 4z^2 + 2}$$

9. On a :

$$\boxed{\varphi_2^{-1}(\{0\}) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, \qquad \varphi_3^{-1}(\{0\}) = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}}$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_4(z) = 0 &\iff x^2 - 4x + 2 = 0 \qquad \text{(en posant } x = z^2\text{)}\\ &\iff x = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \text{ ou } x = 2 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

Comme $2 \pm \sqrt{2} \in \mathbb{R}_+$, on conclure que :

$$\boxed{\varphi_4^{-1}(\{0\}) = \left\{ -\sqrt{2+\sqrt{2}}, -\sqrt{2-\sqrt{2}}, \sqrt{2-\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2}} \right\}}$$

10. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi_n(f(z)) = f(z^n)$ en utilisant une récurrence double.
    - ⋆ On a $f(z^0) = f(1) = 2 = \varphi_0(f(z))$ (puisque $\varphi_0$ est constante égale à 2) et :

    $$f(z) = z + \frac{1}{z} = \varphi_1(f(z)) \qquad \text{car} \qquad \varphi_1 : w \longmapsto w$$

    Les égalités sont donc vraies aux rangs 0 et 1.
    - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\varphi_n(f(z)) = f(z^n)$ et $\varphi_{n+1}(f(z)) = f(z^{n+1})$. D'après la relation de récurrence vérifiée par la suite $(\varphi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$, on a :

    $$\begin{aligned}\varphi_{n+2}(f(z)) &= f(z)\varphi_{n+1}(f(z)) - \varphi_n(f(z))\\ &= f(z)f(z^{n+1}) - f(z^n) \qquad \text{(hypothèse de récurrence)}\\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\\ &= z^{n+2} + \frac{1}{z^n} + z^n + \frac{1}{z^{n+2}} - z^n - \frac{1}{z^n}\\ &= z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}\\ &= f(z^{n+2})\end{aligned}$$

    L'égalité est donc vraie au rang $n + 2$.

    Par principe de récurrence double, on a :

    $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^*, \qquad \varphi_n(f(z)) = f(z^n)}$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    (a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a :

    $$\begin{aligned}f(z^n) = 0 \iff z^n + \frac{1}{z^n} = 0 \iff \frac{z^{2n}+1}{z^n} = 0 &\iff z^{2n} = -1\\ &\iff \exists\, k \in [\![0, 2n-1]\!],\ z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2n}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{2n}}\end{aligned}$$

    Ainsi :

    $$\boxed{\text{l'ensemble des solutions cherché est } \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2n}}\,\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![0, 2n-1]\!] \right\}}$$

    (b) Soit $z \in \mathbb{C}$.
    - ⋆ On suppose que $\varphi_n(z) = 0$. Comme $f$ est surjective de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}$, il existe $w \in \mathbb{C}^*$ tel que $z = f(w)$. On a donc $\varphi_n(f(w)) = 0$ *i.e.* $f(w^n) = 0$ (d'après la question 10.). On déduit de la question précédente qu'il existe $k \in [\![0, 2n-1]\!]$ tel que $w = \mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$. Il s'ensuit que :

    $$z = w + \frac{1}{w} = \mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} + \mathrm{e}^{-i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} = 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$$

    - ⋆ Réciproquement, supposons qu'il existe $k \in [\![0, 2n-1]\!]$ tel que $z = 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$. Alors en posant $w = \mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} \in \mathbb{C}^*$, on a $z = f(w)$ et alors :

    $$\varphi_n(z) = \varphi_n(f(w)) = f(w^n) = 0$$

    d'après la question précédente.

    Finalement :

    $$\boxed{\varphi_n^{-1}(\{0\}) = \left\{ 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \;\middle|\; k \in [\![0, 2n-1]\!] \right\}}$$