

DEVOIR SURVEILLÉ 3

un corrigé

Questions de cours.

1. (a) $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$
 (b) $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$
2. (a) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq M$
 (b) m est le minimum de A si :

$$m \in A \quad \text{et} \quad (\forall a \in A, m \leq a)$$

(c) On appelle borne supérieure de A le plus petit majorant de A , s'il existe.

3. D'après la propriété de la borne supérieure, la partie B de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure si elle est non vide et majorée.
4. Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

6. Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$ et :

$$\bar{\bar{\xi}} = \overline{\left(\frac{z-1}{iz+i} \right)} = \frac{\overline{z-1}}{\overline{iz+i}} = \frac{\bar{z}-\bar{1}}{\bar{i} \times \bar{z} + \bar{i}} = \frac{\frac{1}{z}-1}{-i \times \frac{1}{z} - i} = \frac{1-z}{-i-iz} = \frac{z-1}{i+iz}$$

c'est-à-dire $\bar{\bar{\xi}} = \xi$. On peut donc conclure que $\xi \in \mathbb{R}$.

7. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On résout :

$$e^{i\theta} = -1 \iff e^{i\theta} = e^{i\pi} \iff \theta \equiv \pi [2\pi]$$

L'ensemble des solutions cherché est donc $\mathcal{S} = \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \pi + 2\pi\mathbb{Z}$.

8. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. D'après les formules d'Euler, on a :

$$\begin{aligned} \sin(\theta)^2 \cos(2\theta) &= \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2 (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta})}{(2i)^2 \times 2} = -\frac{(e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta})(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta})}{8} \\ &= -\frac{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 2 - 2(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta})}{8} \\ &= -\frac{2\cos(4\theta) + 2 - 4\cos(2\theta)}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sin(\theta)^2 \cos(2\theta) = -\frac{\cos(4\theta)}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\cos(2\theta)}{2}.$$

10. Pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, on a $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

11. Soit $z \in \mathbb{C}$. On résout :

$$e^z = 2 \iff e^z = e^{\ln(2)} \iff z \equiv \ln(2) [2i\pi]$$

L'ensemble des solutions cherché est donc $\mathcal{S} = \{\ln(2) + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \ln(2) + 2i\pi\mathbb{Z}$.

12. On a :

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad \sqrt{3} + i = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Donc la forme trigonométrique de z est :

$$z = 4 e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = 4 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

13. L'équation (E) est une équation du second degré dont le discriminant Δ est égal à :

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1 - i) = -3 + 4i = (1 + 2i)^2$$

Par conséquent :

les solutions de (E) sont $\frac{1 \pm (1 + 2i)}{2}$, i.e. $-i$ et $1 + i$

Exercice 1 (nombres réels).

Partie I – Équations, inéquations

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a (en multipliant par $e^x \neq 0$) :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x) = 2 &\iff e^x + e^{-x} = 4 \iff (e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0 \\ &\iff X^2 - 4X + 1 = 0 \quad (\text{en posant } X = e^x) \\ &\iff X = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \\ &\iff x = \ln(2 \pm \sqrt{3}) \end{aligned}$$

par injectivité de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et car $2 \pm \sqrt{3} > 0$. Donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \ln(2 - \sqrt{3}), \ln(2 + \sqrt{3}) \right\}$$

2. ★ Le domaine de validité de l'inéquation est $[-3, +\infty[$.

★ Soit $x \in [-3, +\infty[$. On distingue deux cas.

— Si $x \in [-3, 3]$, alors $\sqrt{x+3} \geq 0$ et $x-3 < 0$ donc $\sqrt{x+3} \geq x-3$. Ainsi, x est solution.

— Supposons maintenant que $x \in [3, +\infty[$. Comme $\sqrt{x+3}, x-3 \in \mathbb{R}_+$, on a par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} \geq x-3 &\iff x+3 \geq (x-3)^2 \iff x+3 \geq x^2 - 6x + 9 \iff x^2 - 7x + 6 \leq 0 \\ &\iff x \in [1, 6] \\ &\iff x \in [3, 6] \end{aligned}$$

car $x \in [3, +\infty[$.

Finalement :

$\mathcal{S} =]-\infty, 3] \cup [3, 6] =]-\infty, 6]$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad |1-x| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1-x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

On distingue trois cas.

★ **Premier cas** : $x \in]-\infty, 0]$. Alors :

$$|1-x| - 2|x| = -1 \iff 1-x - 2(-x) = -1 \iff x = -2$$

Comme $-2 \in]-\infty, 0]$, -2 est solution.

★ **Deuxième cas** : $x \in [0, 1]$. Alors :

$$|1-x| - 2|x| = -1 \iff 1-x - 2x = -1 \iff x = \frac{2}{3}$$

Comme $\frac{2}{3} \in [0, 1]$, $\frac{2}{3}$ est solution.

★ **Toisième cas** : $x \in [1, +\infty[$. Alors :

$$|1-x| - 2|x| = -1 \iff x-1 - 2x = -1 \iff x = 0$$

Comme $0 \notin [1, +\infty[$, 0 n'est pas solution.

Finalement :

$$\mathcal{S} = \left\{ -2, \frac{2}{3} \right\}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Alors :

$$\frac{1}{x+1} \geq x-1 \iff \frac{1-(x-1)(x+1)}{x+1} \geq 0 \iff \frac{2-x^2}{x+1} \geq 0$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
$2-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{2-x^2}{x+1}$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$

Donc :

$$\mathcal{S} =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup]-1, \sqrt{2}]$$

Partie II – Topologie

5. Soit $a \in A$. Il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = \frac{mn}{m^2 + mn + n^2}$. Comme $mn > 0$ et $m^2 + mn + n^2 > 0$ (puisque m et n sont des entiers strictement positifs), on a $a > 0$. De plus :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - a &= \frac{1}{3} - \frac{mn}{m^2 + mn + n^2} = \frac{(m^2 + mn + n^2) - 3mn}{3(m^2 + mn + n^2)} = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{3(m^2 + mn + n^2)} \\ &= \frac{(m-n)^2}{3(m^2 + mn + n^2)} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car $(m-n)^2 \geq 0$ et $3(m^2 + mn + n^2) > 0$. Finalement :

$$\forall a \in A, \quad 0 < a \leq \frac{1}{3}$$

6. Le choix $m = n = 1 \in \mathbb{N}^*$ nous donne :

$$\frac{1 \times 1}{1^2 + 1 \times 1 + 1^2} = \frac{1}{3} \in A$$

Comme $\frac{1}{3}$ majore A (d'après la question précédente), on peut conclure que :

A possède un maximum qui vaut $\frac{1}{3}$; a fortiori, A possède également une borne supérieure égale à $\sup(A) = \max(A) = \frac{1}{3}$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \frac{n}{1+n+n^2} \in A$ (on a fixé $m = 1 \in \mathbb{N}^*$). Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + 1 + n} = 0$$

De plus, 0 minore A donc (d'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure) :

0 est la borne inférieure ; de plus, $0 \notin A$ donc A n'admet pas de minimum

Le fait que $0 \notin A$ provient de l'inégalité stricte obtenue à la question précédente.

Exercice 2 (encadrement d'une somme de modules).

1. Soient $z \in \mathbb{U}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z .

(a) On sait (formule de duplication pour le cosinus) que :

$$\cos(\theta) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - 1$$

(b) On sait que $|z| = 1$ et que θ est un argument de z donc $z = e^{i\theta}$. Alors :

$$1 + z = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

d'après les formules d'Euler. Comme $|e^{i\frac{\theta}{2}}| = 1$, on a par multiplicativité du module :

$$|1 + z| = \underbrace{2}_{\geq 0} \times |e^{i\frac{\theta}{2}}| \times \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = 2 \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|$$

De plus :

$$\begin{aligned} 1 - z + z^2 &= 1 - e^{i\theta} + e^{2i\theta} = e^{i\theta} (e^{-i\theta} - 1 + e^{i\theta}) \\ &= e^{i\theta} (2 \cos(\theta) - 1) \\ &= e^{i\theta} \left[2 \left(2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - 1 \right) - 1 \right] \\ &= e^{i\theta} \left(4 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - 3 \right) \end{aligned}$$

Comme $|e^{i\theta}| = 1$, on obtient :

$$|1 - z + z^2| = \left| 4 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - 3 \right|$$

Finalement :

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad f(z) = 2 \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| + \left| 4 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - 3 \right| \quad (\text{où } \text{Arg}(z) \equiv \theta [2\pi])$$

2. La fonction g est paire sur $[-1, 1]$. En effet, $[-1, 1]$ est symétrique par rapport à 0 et :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad g(-t) = 2|-t| + |4(-t)^2 - 3| = 2|t| + |4t^2 - 3| = g(t)$$

Il suffit donc d'étudier g sur $[0, 1]$. Or, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $|t| = t$ et :

$$4t^2 - 3 \geq 0 \iff t^2 \geq \frac{3}{4} \iff t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

par croissance stricte de la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ sur $\mathbb{R}_+$ et car $t \in \mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\forall t \in [0, 1], \quad g(t) = \begin{cases} 2t + 3 - 4t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2t + 4t^2 - 3 & \text{si } \frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Sur l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$, la fonction g est croissante puisque :

$$\forall t \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right], \quad g'(t) = 2 + 8t \geq 0$$

De plus :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], \quad g'(t) = 2 - 8t = 2(1 - 4t) \geq 0 \iff t \leq \frac{1}{4}$$

On en déduit le tableau de variations de g suivant sur $[0, 1]$:

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
g		$\frac{13}{4}$		3

$3 \nearrow \quad \searrow \sqrt{3} \nearrow$

On a $\sqrt{3} \leq 3 \leq \frac{13}{4}$ (en effet, $3 \leq 9$ et $12 \leq 13$) donc :

le minimum de g sur $[-1, 1]$ vaut $\sqrt{3}$, son maximum vaut $\frac{13}{4}$

3. Soit $z \in \mathbb{U}$. En notant θ un argument de z , on sait que :

$$f(z) = g\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Or $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \in [-1, 1]$ donc, d'après la question 2., on a :

$$\sqrt{3} \leq g\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \leq \frac{13}{4} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sqrt{3} \leq f(z) \leq \frac{13}{4}$$

Finalement :

$\forall z \in \mathbb{U}, \quad \sqrt{3} \leq 1+z + 1-z+z^2 \leq \frac{13}{4}$

Exercice 3 (calcul de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$).

1. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$. On a :

$$\frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1} = \frac{e^{i\theta}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{e^{i\theta}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})} = \frac{2i \sin(\theta)}{2 \cos(\theta)}$$

Ainsi :

$\frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1} = i \tan(\theta)$
--

(b) On sait que l'ensemble des racines cinquièmes de l'unité est :

$\mathbb{U}_5 = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{5}} \mid k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket \right\}$
--

(c) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ (de sorte que $1 - iz \neq 0$; il est par ailleurs clair que $-i$ n'est pas solution de $(\star)$). Alors :

$$\begin{aligned}
 (1+iz)^5 = (1-iz)^5 &\iff \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5 = 1 \iff \frac{1+iz}{1-iz} \in \mathbb{U}_5 \\
 &\iff \exists k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, \frac{1+iz}{1-iz} = e^{i\frac{2k\pi}{5}} \\
 &\iff \exists k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, 1+iz = e^{i\frac{2k\pi}{5}} - i e^{i\frac{2k\pi}{5}} z \\
 &\iff \exists k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, z = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{5}} - 1}{i(e^{i\frac{2k\pi}{5}} + 1)} \text{ car } \frac{2k\pi}{5} \neq \pi [2\pi]
 \end{aligned}$$

et donc, en utilisant la question 1.(a), on peut conclure que :

l'ensemble des solutions de $(\star)$ est $\left\{ \tan\left(\frac{k\pi}{5}\right) \mid k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket \right\}$
--

2. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. En utilisant la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}
 z \text{ est solution de } (*) &\iff \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (iz)^k = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (-iz)^k \\
 &\iff 1 + 5iz - 10z^2 - 10iz^3 + 5z^4 + iz^5 = 1 - 5iz - 10z^2 + 10iz^3 + 5z^4 - iz^5 \\
 &\iff 2iz^5 - 20iz^3 + 10iz = 0 \\
 &\iff 2iz(z^4 - 10z^2 + 5) = 0
 \end{aligned}$$

Par intégrité de $\mathbb{C}$, on peut conclure que :

$$z \text{ est solution de } (*) \iff (z = 0 \text{ ou } z^4 - 10z^2 + 5 = 0)$$

- (b) Le discriminant de l'équation du second degré $Z^2 - 10Z + 5 = 0$ vaut $80 = 4^2 \times 5$. Les solutions de cette équation sont donc :

$$\frac{10 \pm \sqrt{80}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{5}$$

Les deux racines obtenues sont positives (puisque $20 = (2\sqrt{5})^2 \leq 25$) donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
 z \text{ est solution de } (*) &\iff z = 0 \text{ ou } z^2 = 5 - 2\sqrt{5} \text{ ou } z^2 = 5 + 2\sqrt{5} \\
 &\iff z = 0 \text{ ou } z = \pm \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \text{ ou } z = \pm \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\text{l'ensemble des solutions de } (*) \text{ est } \left\{ 0, -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}, -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \right\}$$

3. D'après les questions 1.(c) et 2.(b), l'ensemble des solutions de $(*)$ est :

$$\left\{ \tan\left(\frac{k\pi}{5}\right) \mid k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket \right\} = \left\{ 0, -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}, -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \right\}$$

En particulier, les nombres $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, qui sont solutions de $(*)$, appartiennent au second ensemble. Or $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ donc (par croissance stricte de la fonction tangente sur $[0, \frac{\pi}{2}]$) :

$$0 < \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) < \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Comme :

$$-\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} < -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} < 0 < \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} < \sqrt{5 + 2\sqrt{5}},$$

on obtient, par élimination,

$$\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

Exercice 4 (applications homographiques du plan complexe).

Partie I – Étude d'une application

1. Montrons que f est injective. Soient $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ tels que $f(z) = f(z')$. Montrons que $z = z'$. On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{iz + 1}{z + i} = \frac{iz' + 1}{z' + i} &\iff (iz + 1)(z' + i) = (iz' + 1)(z + i) \\
 &\iff izz' - z + z' + i = izz' - z' + z + i \\
 &\iff z = z'
 \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\text{l'application } f \text{ est injective}$$

2. Montrons l'égalité $f(\mathbb{C} \setminus \{-i\}) = \mathbb{C} \setminus \{i\}$ en raisonnant par double inclusion.

★ Montrons que $f(\mathbb{C} \setminus \{-i\}) \subset \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

Soit $\omega \in f(\mathbb{C} \setminus \{-i\})$. Il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ tel que $\omega = f(z)$. Il est clair que ω est un nombre complexe ; on veut montrer que $\omega \neq i$. Par l'absurde, si $\omega = i$, alors on a $\frac{iz+1}{z+i} = i$, c'est-à-dire $iz+1 = iz-1$, soit encore $1 = -1$, ce qui est absurde. On a donc bien $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, ce qui démontre l'inclusion annoncée.

★ Montrons maintenant que $\mathbb{C} \setminus \{i\} \subset f(\mathbb{C} \setminus \{-i\})$.

Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On résout :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \omega &\iff \frac{iz+1}{z+i} = \omega \iff iz+1 = \omega z + i\omega \\ &\iff z(i-\omega) = i\omega - 1 \\ &\iff z = \frac{i\omega - 1}{i - \omega} \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que $z \neq -i$. Par l'absurde, si $z = -i$, alors on obtient (en raisonnant de la même manière qu'au point précédent) que $-1 = 1$, ce qui est exclu. Ainsi, $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ et donc $\omega \in f(\mathbb{C} \setminus \{-i\})$. On a démontré la seconde inclusion.

Finalement :

$$\boxed{f(\mathbb{C} \setminus \{-i\}) = \mathbb{C} \setminus \{i\}}$$

Comme $f(\mathbb{C} \setminus \{-i\}) \neq \mathbb{C}$, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{l'application } f \text{ n'est pas surjective de } \mathbb{C} \setminus \{-i\} \text{ sur } \mathbb{C}}$$

3. Montrons que $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}$. Soit $\omega \in f(\mathcal{P})$. Il existe $z \in \mathcal{P}$ tel que $\omega = f(z)$. Posons ensuite $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$, de sorte que $z = x + iy$. L'hypothèse $z \in \mathcal{P}$ se réécrit $y > 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} |\omega| &= \left| \frac{i(x+iy)+1}{(x+iy)+i} \right| = \frac{|(1-y)+ix|}{|x+(y+1)i|} = \sqrt{\frac{x^2+(1-y)^2}{x^2+(y+1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{x^2+y^2+1-2y}{x^2+y^2+1+2y}} \end{aligned}$$

Or $y > 0$ donc $0 \leq x^2 + y^2 + 1 - 2y < x^2 + y^2 + 1 + 2y$ donc $0 \leq \frac{x^2 + y^2 + 1 - 2y}{x^2 + y^2 + 1 + 2y} < 1$ puis, par croissance stricte de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a $|\omega| < 1$. Ainsi, $\omega \in \mathcal{D}$. On a donc bien l'inclusion :

$$\boxed{f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}}$$

4. Soit $\omega \in \mathcal{D}$. On a montré à la question 2. que ω admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$, à savoir :

$$z = \frac{i\omega - 1}{i - \omega}$$

Il reste à vérifier que $z \in \mathcal{P}$, c'est-à-dire que $\operatorname{Im}(z) > 0$. Or :

$$z = \frac{(i\omega - 1)(-i - \bar{\omega})}{|i - \omega|^2} = \frac{\omega - i|\omega|^2 + i + \bar{\omega}}{|i - \omega|^2} = \frac{2\operatorname{Re}(\omega) + i(1 - |\omega|^2)}{|i - \omega|^2}$$

et donc :

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{1 - |\omega|^2}{|i - \omega|^2} > 0$$

car $\omega \in \mathcal{D}$. On a donc bien $z \in \mathcal{P}$ et l'égalité $\omega = g(z)$. Donc ω admet un unique antécédent par g dans $\mathcal{P}$. On peut donc conclure que :

$\boxed{\text{l'application } g \text{ est bijective de réciproque :}}$

$$g^{-1} : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow \mathcal{P} \\ \omega & \longmapsto \frac{i\omega - 1}{i - \omega} \end{cases}$$

5. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Alors :

$$\begin{aligned}
z \in f^{-1}(\mathbb{U}) &\iff f(z) \in \mathbb{U} \iff |f(z)| = 1 \\
&\iff |f(z)|^2 = 1 \\
&\iff f(z) \times \overline{f(z)} = 1 \\
&\iff \frac{iz+1}{z+i} \times \frac{-i\bar{z}+1}{\bar{z}-i} = 1 \\
&\iff (iz+1)(-i\bar{z}+1) = (z+i)(\bar{z}-i) \\
&\iff z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1 = z\bar{z} + i\bar{z} - iz + 1 \\
&\iff z = \bar{z} \\
&\iff z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{f^{-1}(\mathbb{U}) = \mathbb{R}}$$

Partie II – Étude d'une famille d'applications

6. Soient $x, y \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned}
|x-y|^2 &= (x-y)\overline{(x-y)} = (x-y)(\bar{x}-\bar{y}) = x\bar{x} - x\bar{y} - \bar{x}y + y\bar{y} \\
&= |x|^2 - (x\bar{y} + \bar{x}y) + |y|^2
\end{aligned}$$

et on sait que $x\bar{y} + \bar{x}y = 2\operatorname{Re}(x\bar{y})$ donc :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{C}, \quad |x-y|^2 = |x|^2 - 2\operatorname{Re}(x\bar{y}) + |y|^2}$$

7. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{\bar{a}}\right\}$. Par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, et puisque $\frac{|z-a|}{|\bar{a}z-1|}, 1 \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned}
z \in \varphi_a(\mathbb{D}) &\iff |\varphi_a(z)| < 1 \iff \frac{|z-a|}{|\bar{a}z-1|} < 1 \\
&\iff \frac{|z-a|^2}{|\bar{a}z-1|^2} < 1 \\
&\iff |z-a|^2 < |\bar{a}z-1|^2
\end{aligned}$$

car $|\bar{a}z-1|^2 > 0$. On utilise ensuite la question 6. :

$$\begin{aligned}
|z-a|^2 < |\bar{a}z-1|^2 &\iff |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{a}) + |a|^2 < |\bar{a}z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z \times \bar{1}) + |1|^2 \\
&\iff |z|^2 + |a|^2 < \underbrace{|\bar{a}|^2}_{=|a|^2} |z|^2 + 1 \\
&\iff |z|^2 (1 - |a|^2) < 1 - |a|^2 \\
&\iff |z|^2 < 1 \quad (\text{car } 1 - |a|^2 > 0 \text{ car } a \in \mathbb{D}) \\
&\iff |z| < 1
\end{aligned}$$

par croissance stricte de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ (et car $|z|, 1 \in \mathbb{R}_+$). On a donc démontré que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{\bar{a}}\right\}, \quad z \in \varphi_a^{-1}(\mathbb{D}) \iff z \in \mathbb{D}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\varphi_a^{-1}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}}$$