

DEVOIR SURVEILLÉ 3

durée de l'épreuve : 4h

- La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.
- Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte quatre pages et est composé de questions de cours suivies de quatre exercices, tous indépendants les uns des autres.

Questions de cours.

Quand il s'agit d'énoncer une formule du cours, il est bien entendu important d'introduire les variables.

- Soient E et F deux ensembles et $f \in F^E$.
 - Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Définir l'ensemble $f(X)$.
 - Donner la définition de « f est surjective de E sur F ».
- Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
 - Donner la définition de « A est majorée ».
 - Soit $m \in \mathbb{R}$. Donner la définition de « m est le minimum de A ».
 - Lorsqu'elle existe, qu'appelle-t-on borne supérieure de l'ensemble A ?
- Soit $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. À quelle condition suffisante l'ensemble B possède-t-il une borne supérieure ?
- Énoncer les deux formes de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler les inégalités liées à la partie entière de x .
- Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Montrer que le nombre complexe $\xi = \frac{z-1}{iz+i}$ appartient à $\mathbb{R}$.
- Donner l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $e^{i\theta} = -1$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.
- Rappeler les formules d'Euler.
- Linéariser $\sin(\theta)^2 \cos(2\theta)$.
- Soient $p, q \in \mathbb{R}$. Donner, sans démonstration, la formule de factorisation de $\cos(p) + \cos(q)$.
- Donner l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $e^z = 2$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
- Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $z = (1+i)^2(\sqrt{3}+i)$.
- Résoudre l'équation :

$$z^2 - z + 1 - i = 0 \tag{E}$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 1 (nombres réels).

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie I – Équations, inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\text{ch}(x) = 2$;
2. $\sqrt{x+3} \geq x-3$;
3. $|1-x| - 2|x| = -1$;
4. $\frac{1}{x+1} \geq x-1$;

On notera $\mathcal{S}$ chaque ensemble de solutions.

Partie II – Topologie

On considère l'ensemble :

$$A = \left\{ \frac{mn}{m^2 + mn + n^2} \mid m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

5. Montrer que :

$$\forall a \in A, \quad 0 < a \leq \frac{1}{3}$$

6. Montrer que l'ensemble A possède un maximum à expliciter. L'ensemble A possède-t-il une borne supérieure? La déterminer le cas échéant.
7. L'ensemble A possède-t-il une borne inférieure? un minimum? Préciser les valeurs correspondantes le cas échéant.

Exercice 2 (encadrement d'une somme de modules).

L'objectif de cet exercice est de démontrer que :

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad \sqrt{3} \leq |1+z| + |1-z+z^2| \leq \frac{13}{4}$$

À cet effet, on introduit la fonction f définie par :

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad f(z) = |1+z| + |1-z+z^2|$$

1. Soit $z \in \mathbb{U}$. On note $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z .

(a) Exprimer $\cos(\theta)$ en fonction de $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

(b) Établir alors que :

$$f(z) = 2 \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| + \left| 4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3 \right|$$

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$g(t) = 2|t| + |4t^2 - 3|$$

Déterminer le minimum et le maximum de g sur l'intervalle $[-1, 1]$.

3. Conclure.

Exercice 3 (calcul de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$).

On considère l'équation :

$$(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5 \quad (\star)$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, qui va nous permettre de déterminer les valeurs de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et de $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

1. *Résolution trigonométrique de $(\star)$*

(a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$. Montrer que :

$$\frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1} = i \tan(\theta)$$

(b) Expliciter l'ensemble des racines cinquièmes de l'unité.

(c) En déduire que les solutions de $(\star)$ sont les nombres :

$$z_k = \tan\left(\frac{k\pi}{5}\right), \quad \text{où } k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$$

2. *Résolution algébrique de $(\star)$*

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$z \text{ est solution de } (\star) \iff (z = 0 \text{ ou } z^4 - 10z^2 + 5 = 0)$$

(b) En déduire les solutions de $(\star)$.

3. *Conclusion.*

Démontrer que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

Exercice 4 (applications homographiques du plan complexe).

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie I – Étude d’une application

On pose :

$$\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

On définit l’application $f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{iz+1}{z+i} \end{cases}.$

1. L’application f est-elle injective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{C} \setminus \{-i\}) = \mathbb{C} \setminus \{i\}$. L’application f est-elle surjective ?
3. Montrer que $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}$.
4. On considère l’application $g : \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ z & \longmapsto & \frac{iz+1}{z+i} \end{cases}$. Montrer que l’application g est bijective et déterminer l’application réciproque associée.
5. Calculer $f^{-1}(\mathbb{U})$.

Partie II – Étude d’une famille d’applications

On note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert du plan complexe, *i.e.* :

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

Soit $a \in \mathbb{D}$. On considère l’application :

$$\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{\bar{a}}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \end{cases}$$

On souhaite démontrer que :

$$\varphi_a^{-1}(\mathbb{D}) = \mathbb{D},$$

où $\varphi_a^{-1}(\mathbb{D})$ désigne l’image réciproque de $\mathbb{D}$ par l’application φ_a .

6. Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{C}, \quad |x-y|^2 = |x|^2 - 2 \operatorname{Re}(x\bar{y}) + |y|^2$$

7. En déduire que $\varphi_a^{-1}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

– FIN DE L’ÉPREUVE –