

DEVOIR SURVEILLÉ 2

durée de l'épreuve : 3h

- La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir.
- Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet est composé de trois exercices et d'un problème, tous indépendants les uns des autres.

Exercice 1 (cours).

Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes. Quand il s'agit d'énoncer une formule du cours, il est bien entendu important d'**introduire les variables mises en jeu**.

1. Applications.

Soient E, F et G trois ensembles, $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

- Donner la définition de : « f est surjective de E sur F » (en utilisant des quantificateurs).
- Donner la définition de « f est injective » (en utilisant des quantificateurs).
- Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Définir l'ensemble $f(X)$.
- Soit $Y \in \mathcal{P}(F)$. Définir l'ensemble $f^{-1}(Y)$.
- On suppose que f et g sont surjectives. Montrer que l'application $g \circ f \in G^E$ est surjective.

2. Un peu de logique. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- Donner la négation de l'assertion :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner la forme contraposée de l'assertion :

$$(f(x) \leq 1) \implies (x > 3)$$

3. Soient E un ensemble et X, Y deux sous-ensembles de E . Simplifier l'ensemble suivant :

$$Z = (X \cup Y) \cap (\overline{X} \cup Y) \cap (X \cap \overline{Y})$$

4. Coefficients binomiaux et sommes.

- Énoncer la formule du binôme de Newton.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\alpha = (x + 1)^6$. Donner α sous forme développée en précisant la valeur des coefficients.

Exercice 2 (calculs de sommes et d'un produit).

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Calculer les sommes suivantes :

$$(a) S = \sum_{k=2}^n \frac{2^k}{3^{k+1}}$$

$$(b) T = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$(c) U = \sum_{p=1}^n p(p-4)$$

$$(d) V = \sum_{j=1}^n \ln \left(1 + \frac{2}{j} \right)$$

Pour la somme U , on écrira la réponse sous forme factorisée.

2. Calculer les sommes et le produit suivants :

$$(a) W = \sum_{1 \leq i < j \leq n} 7$$

$$(b) X = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} 2^i 3^j$$

$$(c) Y = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \right)$$

Exercice 3 (différence symétrique).

Soit E un ensemble. Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on appelle *différence symétrique de A et B* , notée $A \Delta B$, la partie de E définie par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

Remarquons qu'on a :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \Delta B = B \Delta A$$

On dit que l'opération Δ est commutative.

1. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Déterminer les ensembles $A \Delta E$, $A \Delta A$, $A \Delta \emptyset$ et $A \Delta \overline{A}$.
2. Montrer que :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

3. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

- (a) Montrer que :

$$\overline{A \Delta B} = \overline{A} \Delta \overline{B} = A \Delta B$$

- (b) Que dire de $\overline{A \Delta \overline{B}}$?

4. **Associativité de l'opération Δ**

Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

- (a) Justifier que :

$$(A \Delta B) \Delta C = ((A \Delta B) \cap \overline{C}) \cup ((\overline{A \Delta B}) \cap C)$$

- (b) En déduire que :

$$(A \Delta B) \Delta C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$$

- (c) Conclure que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

On dit que la différence symétrique est une opération associative, et on note $A \Delta B \Delta C$ l'ensemble :

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

5. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On considère l'application $\varphi_A : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ B & \longmapsto & A \Delta B \end{cases}$.

- (a) Soit $C \in \mathcal{P}(E)$. En utilisant les propriétés de l'opération Δ , expliciter l'ensemble $A \Delta C \Delta A$.
(b) En déduire que l'application φ_A est surjective.

6. Montrer que l'application φ_A est injective.

Problème (autour des coefficients binomiaux).

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Partie I : calcul d'une somme

Le but de cette première partie est de démontrer, de deux manières différentes, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (*)$$

1. Méthode 1

Proposer une première démonstration de l'identité (*).

2. Méthode 2 : en utilisant la formule du triangle de Pascal généralisée

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que :

$$\forall \ell \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \binom{k}{\ell} = \binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1}$$

(b) Soient $\ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq n$. Montrer que :

$$\sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$$

Cette égalité s'appelle formule du triangle de Pascal généralisée.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Expliciter les coefficients binomiaux $\binom{k}{1}$, $\binom{k}{2}$ et $\binom{k}{3}$.

(d) En déduire qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = a \binom{k}{3} + b \binom{k}{2} + c \binom{k}{1}$$

(e) Retrouver alors (*).

Si les coefficients a , b et c n'ont pas été obtenus à la question précédente, un calcul littéral pourra tout de même être effectué.

Partie II : formule d'inversion de Pascal

Soit $(a_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. À partir de celle-ci, on définit une suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} a_\ell$$

L'objectif de cette partie est de trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_n en fonction de $b_0, \dots, b_n$.

3. Soient $n, k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq k \leq n$. Montrer que :

$$\binom{n}{k} \binom{k}{\ell} = \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}$$

4. Soient $n, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq n$. On pose $S_{n,\ell} = \sum_{k=\ell}^n (-1)^{k-\ell} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell}$. Montrer que :

$$S_{n,\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < n \\ 1 & \text{si } \ell = n \end{cases}$$

5. Conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} b_k$$

6. **Application.**

On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = (n+1)x_n + (-1)^{n+1}$$

(a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

– FIN DE L'ÉPREUVE –