

DEVOIR SURVEILLÉ 2

un corrigé

Exercice 1 (cours).

1. Applications.

(a) La définition de « f surjective de E sur F » est :

$$\boxed{\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)}$$

(b) La définition de « f injective » est :

$$\boxed{\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \implies x = x'}$$

(c) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. On a :

$$\boxed{f(X) = \{f(x) \mid x \in E\} \quad (\text{ou } f(X) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\})}$$

(d) Soit $Y \in \mathcal{P}(F)$. On a :

$$\boxed{f^{-1}(Y) = \{x \in E \mid f(x) \in Y\}}$$

(e) On suppose que f et g sont surjectives. Montrons que $g \circ f : E \longrightarrow G$ est surjective, *i.e.* que :

$$\forall y \in G, \exists x \in E, y = (g \circ f)(x)$$

Soit $y \in G$.

★ L'application $g : F \longrightarrow G$ est surjective et $y \in G$ donc il existe $z \in F$ tel que $y = g(z)$.

★ L'application $f : E \longrightarrow F$ est surjective et $z \in F$ donc il existe $x \in E$ tel que $z = f(x)$.

Ainsi :

$$y = g(z) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

donc $x \in E$ est un antécédent de y par l'application $g \circ f$ dans E . On peut donc conclure que l'application $g \circ f$ est surjective. Finalement :

$$\boxed{\text{si } f \text{ et } g \text{ sont surjectives, alors } g \circ f \text{ est surjective}}$$

2. Un peu de logique. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(a) La négation de l'assertion proposée est :

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. La forme contraposée de l'assertion proposée est :

$$\boxed{(x \leq 3) \implies (f(x) > 1)}$$

3. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$. On a :

$$\begin{aligned} Z &= [(X \cup Y) \cap (\overline{X} \cup \overline{Y})] \cap (X \cap \overline{Y}) && (\text{associativité de l'intersection}) \\ &= [(X \cap \overline{X}) \cup Y] \cap (X \cap \overline{Y}) && (\text{distributivité de la réunion par rapport à l'intersection}) \\ &= [\emptyset \cup Y] \cap (X \cap \overline{Y}) \\ &= Y \cap (X \cap \overline{Y}) \\ &= Y \cap \overline{Y} \cap X && (\text{associativité et commutativité de l'intersection}) \\ &= \emptyset \cap X \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{Z = \emptyset}$$

4. Coefficients binomiaux et sommes.

(a) La formule du binôme de Newton s'énonce comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\alpha = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} x^k = \binom{6}{0} + \binom{6}{1}x + \binom{6}{2}x^2 + \binom{6}{3}x^3 + \binom{6}{4}x^4 + \binom{6}{5}x^5 + \binom{6}{6}x^6,$$

i.e. :

$$\alpha = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$$

Exercice 2 (calculs de sommes et d'un produit).

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

1. (a) On a :

$$S = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^n \frac{2^k}{3^k} = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

i.e. :

$$S = \frac{4}{9} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$$

(b) D'après la formule du binôme de Newton :

$$T = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = 2^n$$

(c) Par linéarité de la somme, on a :

$$\begin{aligned} U &= \sum_{p=1}^n (p^2 - 4p) = \sum_{p=1}^n p^2 - 4 \sum_{p=1}^n p = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) - 12n(n+1)}{6}, \end{aligned}$$

i.e. :

$$U = \frac{n(n+1)(2n-11)}{6}$$

(d) La somme V est télescopique :

$$V = \sum_{j=1}^n \ln\left(\frac{j+2}{j}\right) = \sum_{j=1}^n (\ln(j+2) - \ln(j)) = \ln(n+2) + \ln(n+1) - \ln(1) - \ln(2),$$

i.e. :

$$V = \ln(n+2) + \ln(n+1) - \ln(2)$$

2. (a) On a :

$$W = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n 7 = \sum_{i=1}^{n-1} 7 \sum_{j=i+1}^n 1 = \sum_{i=1}^{n-1} 7(n-i) = 7 \sum_{k=1}^{n-1} k$$

en utilisant le changement d'indice $k = n - i$. Ainsi :

$$W = \frac{7n(n-1)}{2}$$

(b) En utilisant la formule du binôme de Newton, on a :

$$X = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} 2^i 3^j = \sum_{j=0}^n 3^j \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} 2^i = \sum_{j=0}^n 3^j (2+1)^j = \sum_{j=0}^n 9^j = \frac{9^{n+1} - 1}{9 - 1},$$

i.e. :

$$\boxed{X = \frac{9^{n+1} - 1}{8}}$$

(c) Les propriétés du produit nous donnent :

$$Y = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{\prod_{k=2}^n (k-1)}{\prod_{k=2}^n k} = \frac{(n-1)!}{n!},$$

i.e. :

$$\boxed{Y = \frac{1}{n}}$$

Exercice 3 (différence symétrique).

1. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On a :

$$A \Delta E = (A \cap \underbrace{\overline{E}}_{=\emptyset}) \cup (E \cap \overline{A}) = \emptyset \cup \overline{A} = \overline{A}, \quad A \Delta A = (\underbrace{A \cap \overline{A}}_{=\emptyset}) \cup (\underbrace{\overline{A} \cap A}_{=\emptyset}) = \emptyset$$

et :

$$A \Delta \emptyset = (A \cap \underbrace{\overline{\emptyset}}_{=E}) \cup (\emptyset \cap \overline{A}) = A \cup \emptyset = A, \quad A \Delta \overline{A} = (A \cap \underbrace{\overline{\overline{A}}}_{=A}) \cup (\overline{A} \cap \overline{A}) = A \cup \overline{A} = E$$

Ainsi :

$$\boxed{A \Delta E = \overline{A}, \quad A \Delta A = \emptyset, \quad A \Delta \emptyset = A \quad \text{et} \quad A \Delta \overline{A} = E}$$

2. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On a :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \quad (\text{loi de De Morgan}) \\ &= \underbrace{(A \cap \overline{A})}_{=\emptyset} \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup \underbrace{(B \cap \overline{B})}_{=\emptyset} \quad (\text{distributivité de } \cap \text{ par rapport à } \cup) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= A \Delta B \quad (\text{définition de la différence symétrique}) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)}$$

3. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

(a) On a :

$$\begin{aligned} \overline{A \Delta B} &= \overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} \\ &= (\overline{A \cap \overline{B}}) \cap (\overline{B \cap \overline{A}}) \quad (\text{loi de De Morgan}) \\ &= (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup A) \quad (\text{loi de De Morgan et car } \overline{\overline{A}} = A \text{ et } \overline{\overline{B}} = B) \\ &= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \underbrace{(\overline{A} \cap A)}_{=\emptyset} \cup \underbrace{(B \cap \overline{B})}_{=\emptyset} \cup (B \cap A) \quad (\text{distributivité de } \cap \text{ par rapport à } \cup) \\ &= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap A) \end{aligned}$$

Or :

$$\overline{A} \Delta B = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{\overline{A}}) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap A)$$

et, de la même manière, on a $A \Delta \overline{B} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$. Ainsi :

$$\boxed{\overline{A \Delta B} = \overline{A} \Delta B \stackrel{(*)}{=} A \Delta \overline{B}}$$

(b) D'après l'égalité (*) (en remplaçant B par $\overline{B}$), on a :

$$\boxed{\overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta\overline{\overline{B}} = A\Delta B}$$

4. Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

(a) On a (par définition de la différence symétrique) :

$$(A\Delta B)\Delta C = ((A\Delta B) \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A\Delta B}) = ((A\Delta B) \cap \overline{C}) \cup (C \cap (\overline{A\Delta B}))$$

en utilisant la question 3.(a). L'intersection étant commutative, on peut conclure que :

$$\boxed{(A\Delta B)\Delta C = ((A\Delta B) \cap \overline{C}) \cup ((\overline{A\Delta B}) \cap C)}$$

(b) On a (par définition de la différence symétrique) :

$$\begin{aligned} (A\Delta B) \cap \overline{C} &= [(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] \cap \overline{C} \\ &= [(A \cap \overline{B}) \cap \overline{C}] \cup [(\overline{A} \cap B) \cap \overline{C}] \quad (\text{distributivité de } \cap \text{ par rapport à } \cup) \\ &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \quad (\text{associativité de } \cap) \end{aligned}$$

Le calcul de $(\overline{A\Delta B}) \cap C$ est analogue. Ainsi :

$$\boxed{(A\Delta B)\Delta C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)}$$

(c) L'opération Δ est commutative donc :

$$A\Delta(B\Delta C) = (B\Delta C)\Delta A = (C\Delta B)\Delta A$$

puis, en échangeant les rôles joués par A et C dans l'égalité obtenue à la question précédente, on a :

$$A\Delta(B\Delta C) = (C \cap \overline{B} \cap \overline{A}) \cup (\overline{C} \cap B \cap \overline{A}) \cup (\overline{C} \cap \overline{B} \cap A) \cup (C \cap B \cap A)$$

i.e. (en utilisant la commutativité de $\cup$ et de $\cap$) :

$$\boxed{(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)}$$

5. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

(a) Soit $C \in \mathcal{P}(E)$. On a :

$$\begin{aligned} A\Delta C\Delta A &= (A\Delta C)\Delta A = (C\Delta A)\Delta A \quad (\text{commutativité de } \Delta) \\ &= C\Delta(A\Delta A) \quad (\text{associativité de } \Delta) \\ &= C\Delta\emptyset \quad (\text{question 1.}) \\ &= C \quad (\text{question 1.}) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall C \in \mathcal{P}(E), \quad A\Delta C\Delta A = C}$$

(b) On veut montrer que φ_A est surjective, *i.e.* que :

$$\forall C \in \mathcal{P}(E), \exists B \in \mathcal{P}(E), C = \varphi_A(B)$$

Soit $C \in \mathcal{P}(E)$. D'après la question précédente, on a :

$$\varphi_A(C\Delta A) = A\Delta C\Delta A = C$$

donc $C\Delta A \in \mathcal{P}(E)$ est un antécédent de C par l'application φ_A dans $\mathcal{P}(E)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{l'application } \varphi_A \text{ est surjective}}$$

6. Montrons que l'application φ_A est injective, *i.e.* que :

$$\forall B, C \in \mathcal{P}(E), \varphi_A(B) = \varphi_A(C) \implies B = C$$

Soient $B, C \in \mathcal{P}(E)$. On suppose que $\varphi_A(B) = \varphi_A(C)$, *i.e.* que :

$$A\Delta B = A\Delta C \quad \text{soit encore} \quad (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A})$$

Montrons que $B = C$ en raisonnant par double inclusion.

□ Soit $b \in B$. Montrons que $b \in C$ en raisonnant par disjonction de cas selon que $b \in A$ ou que $b \in \bar{A}$.

— **Premier cas :** $b \in A$.

Par l'absurde, supposons que $b \notin C$. Alors $b \in A \cap \bar{C}$. Comme $A \cap \bar{C} \subset A\Delta C$, on a $b \in A\Delta C$. Mais $A\Delta C = A\Delta B$ donc $b \in A\Delta B$. Ainsi, $b \in A \cap \bar{B}$ ou $b \in B \cap \bar{A}$. Les deux cas fournissent une absurdité car $b \in B$ et $b \in A$. Ainsi, $b \in C$.

— **Deuxième cas :** $b \in \bar{A}$.

Comme $b \in B$, on a $b \in B \cap \bar{A}$. Or $B \cap \bar{A} \subset A\Delta B$ et $A\Delta B = A\Delta C$ donc $b \in A\Delta C$, i.e. $b \in A \cap \bar{C}$ ou $b \in C \cap \bar{A}$. Comme $b \notin A$, on a nécessairement $b \in C \cap \bar{A}$ et donc $b \in C$.

Ceci démontre l'inclusion $B \subset C$.

□ Les ensembles B et C jouant des rôles symétriques, on a aussi l'inclusion $C \subset B$.

Par double inclusion, on a bien l'égalité $B = C$. Ainsi :

l'application φ_A est injective

Problème (autour des coefficients binomiaux)

Partie I : calcul d'une somme

1. On utilise un raisonnement par récurrence.

★ On a :

$$\sum_{k=0}^0 k^3 = 0^3 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$$

donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^n k^3 + (n+1)^3 && \text{(relation de Chasles)} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1) \times (n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2. (a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$. On a (puisque $0 \leq \ell+1 \leq k \leq k+1$) :

$$\begin{aligned} \binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1} &= \frac{(k+1)!}{(\ell+1)!(k-\ell)!} - \frac{k!}{(\ell+1)!(k-\ell-1)!} \times \frac{k-\ell}{k-\ell} \\ &= \frac{(k+1)k! - (k-\ell)k!}{(\ell+1)!(k-\ell)!} \\ &= \frac{(\ell+1)k!}{(\ell+1)!(k-\ell)!} \\ &= \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} \\ &= \binom{k}{\ell} \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'égalité est évidente si $\ell = k$; en effet, $\binom{k}{k+1} = 0$ donc les deux nombres mis en jeu dans l'égalité sont égaux à 1. Finalement :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall \ell \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \binom{k}{\ell} = \binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1}}$$

Remarque : on demande ici de démontrer la formule du triangle de Pascal.

(b) Soient $\ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq n$. D'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} = \sum_{k=\ell}^n \left[\binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1} \right] = \binom{n+1}{\ell+1} - \binom{\ell}{\ell+1}$$

car la somme est télescopique. Or $\binom{\ell}{\ell+1} = 0$ car $\ell+1 > \ell$ donc :

$$\boxed{\sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}}$$

(c) Pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a :

$$\binom{k}{3} = \frac{k!}{3!(k-3)!} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

et cette égalité reste vraie si $k \in \{0, 1, 2\}$ car, dans ce cas, on a $\binom{k}{3} = 0$ (le membre de droite ci-dessus étant également nul). Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \binom{k}{1} = k, \quad \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} \quad \text{et} \quad \binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}}$$

(d) Soient $a, b, c, k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} a \binom{k}{3} + b \binom{k}{2} + c \binom{k}{1} &= a \frac{k(k-1)(k-2)}{6} + b \frac{k(k-1)}{2} + ck \\ &= \frac{a(k^3 - 3k^2 + 2k)}{6} + \frac{b(k^2 - k)}{2} + ck \\ &= \frac{a}{6}k^3 + \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)k^2 + \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c\right)k \end{aligned}$$

Ainsi, pour que l'égalité $a \binom{k}{3} + b \binom{k}{2} + c \binom{k}{1} = k^3$ soit vraie, il *suffit* que a, b et c soient tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{6} = 1 \\ \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = 0 \\ \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c = 0 \end{array} \right. \quad i.e. \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 6 \\ b = a = 6 \\ c = \frac{b}{2} - \frac{a}{3} = 1 \end{array} \right.$$

Finalement :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = 6 \binom{k}{3} + 6 \binom{k}{2} + \binom{k}{1}}$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. En sommant les égalités obtenues à la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^3 &= \sum_{k=0}^n \left(6 \binom{k}{3} + 6 \binom{k}{2} + \binom{k}{1} \right) = 6 \sum_{k=0}^n \binom{k}{3} + 6 \sum_{k=0}^n \binom{k}{2} + \sum_{k=0}^n \binom{k}{1} \\ &= 6 \sum_{k=3}^n \binom{k}{3} + 6 \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} \\ &= 6 \binom{n+1}{4} + 6 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \end{aligned}$$

d'après la formule du triangle de Pascal généralisée (question 2.(b)). En explicitant les coefficients binomiaux, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n k^3 &= 6 \times \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24} + 6 \times \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= n(n+1) \frac{(n-1)(n-2) + 4(n-1) + 2}{4} \\
&= n(n+1) \frac{n^2 + n}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

Ainsi :

on retrouve bien l'égalité (*)

Partie II : formule d'inversion de Pascal

3. Soient $n, k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq k \leq n$. On a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} \binom{k}{\ell} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} = \frac{n!}{(n-k)! \ell! (k-\ell)!} \\
&= \frac{n!}{\ell! (n-\ell)!} \times \frac{(n-\ell)!}{(k-\ell)! ((n-\ell) - (k-\ell))!} \\
&= \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n, k, \ell \in \mathbb{N}, \quad \ell \leq k \leq n \implies \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} = \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}$$

4. Soient $n, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq n$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
S_{n,\ell} &= \sum_{k=\ell}^n (-1)^{k-\ell} \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell} = \binom{n}{\ell} \sum_{k=\ell}^n \binom{n-\ell}{k-\ell} (-1)^{k-\ell} \\
&= \binom{n}{\ell} \sum_{j=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{j} (-1)^j \quad (\text{changement d'indice } j = k - \ell) \\
&= \binom{n}{\ell} \sum_{j=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{j} (-1)^j 1^{n-\ell-j} \\
&= \binom{n}{\ell} 0^{n-\ell}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$S_{n,\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < n \\ 1 & \text{si } \ell = n \end{cases}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les propriétés sur les sommes triangulaires, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} b_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} a_\ell = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} a_\ell \\
&= \sum_{0 \leq \ell \leq k \leq n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} a_\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^n (-1)^{n+\ell} a_\ell \sum_{k=\ell}^n (-1)^{k-\ell} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^n (-1)^{n+\ell} a_\ell S_{n,\ell}
\end{aligned}$$

En utilisant maintenant la question précédente, il vient :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} b_k = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} (-1)^{n+\ell} a_\ell}_{=0} \underbrace{S_{n,\ell}}_{=0} + \underbrace{(-1)^{2n}}_{=1} a_n S_{n,n} = a_n$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} b_k}$$

6. (a) On utilise une récurrence simple.

★ On sait que $x_0 = 1$ donc :

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x_k = \binom{0}{0} x_0 = 1 = 0!$$

L'égalité est donc vraie pour $n = 0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k$. Montrons que $(n+1)! = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x_k$. On a :

$$\begin{aligned} (n+1)! &= (n+1) \times n! \\ &= (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= \sum_{k=0}^n (n+1) \binom{n}{k} x_k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} (k+1) x_k \quad (\text{formule du pion}) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} (x_{k+1} - (-1)^{k+1}) \quad (\text{relation de récurrence vérifiée par la suite}) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} (x_\ell - (-1)^\ell) \quad (\text{changement d'indice } \ell = k+1) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} x_\ell - \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} (-1)^\ell \end{aligned}$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} (-1)^\ell = \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} (-1)^\ell - 1 = 0^{n+1} - 1 = -1 \quad (\text{car } n+1 > 0)$$

donc :

$$(n+1)! = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} x_\ell + 1 = \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} x_\ell$$

car $\binom{n+1}{0} x_0 = 1$. L'égalité est donc vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède (pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a ici $a_k = x_k$ et $b_k = k!$) :

$$x_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{\ell=0}^n \frac{(-1)^{2n-\ell}}{\ell!} \quad (\text{changement d'indice } \ell = n-k)$$

Or $(-1)^{2n} = 1$ et, pour tout $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $(-1)^{-\ell} = (-1)^\ell$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}}$$