Devoir Surveillé 2

un corrigé

Exercice 1 (cours).

1. (a) On sait que :
   - ⋆ f est injective si : $\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \implies x = y$;
   - ⋆ f est surjective si : $\forall y \in F,\ \exists\, x \in E,\ y = f(x)$;
   - ⋆ f est bijective si : $\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ y = f(x)$.

   (b) Par définition, $f(X) = \{y \in F \mid \exists\, x \in X,\ y = f(x)\}$ (ou, si on préfère, $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$).

   (c) Par définition, $f^{-1}(Y) = \{x \in E \mid f(x) \in Y\}$.
2. (a) La négation est : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ u_n > M$.

   (b) La négation est : $\exists\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.

   (c) La négation est : $\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists\, \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0$ et $|u_n - \ell| > \varepsilon$.
3. L'assertion se réécrivant sous la forme « $-1 \leqslant a$ et $a < 2$ », la négation est : $a < -1$ ou $a \geqslant 2$.
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\boxed{(a+b)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} a^k b^{6-k} = b^6 + 6ab^5 + 15a^2b^4 + 20a^3b^3 + 15a^4b^2 + 6a^5b + a^6}$$

5. (a) Par distributivité de la réunion par rapport à l'intersection, on a :

$$\boxed{X = \left[A \cup (B \cap \overline{B})\right] \cap \left[\overline{A} \cup (B \cap \overline{B})\right] = (A \cup \varnothing) \cap (\overline{A} \cup \varnothing) = A \cap \overline{A} = \varnothing}$$

   et :

$$\boxed{Y = \left[A \cap (B \cup \overline{B})\right] \cup \left[\overline{A} \cap (B \cup \overline{B})\right] = (A \cap E) \cup (\overline{A} \cap E) = A \cup \overline{A} = E}$$

   (b) Démontrons l'équivalence en raisonnant par double implication.
   - ⋆ Supposons que $A \setminus B = A$. Montrons alors que $B \setminus A = B$ en raisonnant par double inclusion.
     - L'inclusion $B \setminus A \subset B$ est claire (puisque $B \setminus A = B \cap \overline{A} \subset B$).
     - Soit maintenant $x \in B$. On veut montrer que $x \in B \setminus A$, *i.e.* que $x \in B \cap \overline{A}$. Par l'absurde, si $x \notin \overline{A}$, *i.e.* si $x \in A$, alors l'égalité $A \setminus B = A$ implique que $x \in A \setminus B$ et donc x n'appartient pas à B, ce qui est absurde. Ainsi, $x \notin A$ et donc $x \in B \setminus A$. Ceci prouve l'inclusion $B \subset B \setminus A$.

     Par double inclusion, on peut conclure que $B \setminus A = B$.
   - ⋆ En intervertissant les rôles des ensembles A et B, on a la deuxième implication.

   Ainsi :

$$\boxed{A \setminus B = A \iff B \setminus A = B}$$

Remarque : on peut aussi procéder comme suit. Si $A \setminus B = A$, *i.e.* si $A \cap \overline{B} = A$, alors :

$$\begin{aligned} B \setminus A = B \setminus (A \cap \overline{B}) = B \cap \left(\overline{A \cap \overline{B}}\right) &= B \cap \left(\overline{A} \cup B\right) \qquad \text{(lois de De Morgan)} \\ &= \left(B \cap \overline{A}\right) \cup (B \cap B) \\ &= \left(B \cap \overline{A}\right) \cup B \\ &= B \end{aligned}$$

car $B \cap \overline{A} \subset B$. La réciproque se traite de la même manière (il suffit d'intervertir les rôles joués par A et B).

Exercice 2.

1. On a :

$$\boxed{u_1 = \frac{2\times 0+1}{2\times 0+2}u_0 = \frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{u_2 = \frac{2\times 1+1}{2\times 1+2}u_1 = \frac{3}{8}}$$

2. On procède par récurrence simple.

   ⋆ On a $\dfrac{(2\times 0)\,!}{2^{2\times 0}(0\,!)^2} = \dfrac{1}{1\times 1^2} = 1 = u_0$ donc l'égalité est vraie au rang 0.

   ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \dfrac{(2n)\,!}{2^{2n}(n\,!)^2}$. Montrons que $u_{n+1} = \dfrac{(2n+2)\,!}{2^{2n+2}\big((n+1)\,!\big)^2}$. D'après la relation de récurrence vérifiée par la suite, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}u_n &= \frac{2n+1}{2n+2}\times\frac{(2n)\,!}{2^{2n}(n\,!)^2} \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)}\\ &= \frac{\mathbf{2n+2}}{\mathbf{2n+2}}\times\frac{(2n+1)(2n)\,!}{2(n+1)2^{2n}(n\,!)^2}\\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)\,!}{2^2\times 2^{2n}\times(n+1)^2(n\,!)^2}\\ &= \frac{(2n+2)\,!}{2^{2n+2}\big((n+1)n\,!\big)^2}\\ &= \frac{(2n+2)\,!}{2^{2n+2}\big((n+1)\,!\big)^2} \end{aligned}$$

   donc l'égalité est vraie au rang $n+1$.

   Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{(2n)\,!}{2^{2n}(n\,!)^2}}$$

Exercice 3.

1. ⋆ On a :

$$S = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}} \qquad \textit{i.e.} \qquad \boxed{S = \frac{5}{4}\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right]}$$

   ⋆ La somme T est télescopique :

$$S = \sum_{i=0}^{n}\ln\left(\frac{i+2}{i+1}\right) = \sum_{i=0}^{n}\big(\ln(i+2)-\ln(i+1)\big) = \ln(n+2)-\ln(1) \qquad \textit{i.e.} \qquad \boxed{T = \ln(n+2)}$$

   ⋆ Par linéarité de la somme, on a :

$$U = 6\sum_{k=0}^{n}k^2 + 2\sum_{k=0}^{n}k = 6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\times\frac{n(n+1)}{2} \qquad \textit{i.e.} \qquad \boxed{U = n(n+1)(2n+2)}$$

   ⋆ On a :

$$V = 3\sum_{j=1}^{n}j\underbrace{\sum_{i=1}^{j}1}_{=j} = 3\sum_{j=1}^{n}j^2 \qquad \textit{i.e.} \qquad \boxed{V = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}}$$

   ⋆ D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$W = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}2^k1^{\ell-k} = \sum_{\ell=0}^{n}(2+1)^\ell = 3^0\times\frac{3^{n+1}-1}{3-1} \qquad \textit{i.e.} \qquad \boxed{W = \frac{3^{n+1}-1}{2}}$$

2. Le produit P est télescopique :

$$P = \prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \prod_{p=1}^{n}\frac{p+1}{p} = \frac{2\times 3\times 4\times\cdots\times n\times(n+1)}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n} \qquad \textit{i.e.} \qquad \boxed{P = n+1}$$

Exercice 4.

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = \frac{x^2 - 2x(x+1)}{x^4} = \frac{-x^2-2x}{x^4} = \frac{-x-2}{x^3}$$

On en déduit le tableau de signes de f' et de variations de f suivants sur $\mathbb{R}^*$:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$-x-2$		$+$	0	$-$		$-$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	0

Les limites en $\pm\infty$ et en $0^\pm$ sont immédiates.

(b) i. D'après le tableau de variations de f, on a :

$$\boxed{f(\mathbb{R}^*) = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[}$$

ii. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$f(x) = 1 \iff \frac{x+1}{x^2} = 1 \iff x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

donc :

$$\boxed{\text{les antécédents de 1 par l'application } f \text{ dans } \mathbb{R}^* \text{ sont } \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

iii. Comme $f(\mathbb{R}^*) \neq \mathbb{R}$ (*cf.* question 1.(b)(i)),

$$\boxed{\text{l'application } f \text{ n'est pas surjective (en particulier, } f \text{ n'est donc pas bijective)}}$$

D'après la question 1.(b)(ii), $1 \in \mathbb{R}$ admet deux antécédents par f dans $\mathbb{R}^*$ donc :

$$\boxed{\text{l'application } f \text{ n'est pas injective}}$$

(c) Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. On résout l'équation $y = g(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$:

$$g(x) = y \iff \frac{x+1}{x^2} = y \iff yx^2 - x - 1 = 0$$

L'équation du second degré précédente a pour discriminant $1 + 4y > 0$; ses racines sont donc :

$$x_- = \frac{1-\sqrt{1+4y}}{2y} \qquad \text{et} \qquad x_+ = \frac{1+\sqrt{1+4y}}{2y}$$

Comme $y > 0$, on a $\sqrt{1+4y} > 1$ donc $x_- < 0$ tandis que $x_+ \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, l'équation $y = g(x)$ admet pour unique racine x_+ dans $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{g \text{ est bijective d'application réciproque } g^{-1} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ y & \longmapsto & \dfrac{1+\sqrt{1+4y}}{2y} \end{array}\right.}$$

2. (a) On suppose que f et g sont surjectives. Montrons que l'application $g \circ f : E \longrightarrow G$ est surjective, *i.e.* que :

$$\forall y \in G,\ \exists x \in E,\ y = (g \circ f)(x)$$

Soit $y \in G$.

★ Comme $g : F \longrightarrow G$ est surjective et puisque $y \in G$, il existe $z \in F$ tel que $y = g(z)$.

★ Or $f : E \longrightarrow F$ est surjective et $z \in F$ donc il existe $x \in E$ tel que $z = f(x)$.

★ Ainsi, $y = g(z) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ et donc x est un antécédent de y dans E par l'application $g \circ f$.

Finalement :

$$\boxed{\text{si } f \text{ et } g \text{ sont surjectives, alors } g \circ f \text{ est surjective}}$$

(b) On suppose que $g \circ f$ est injective et que f est surjective. Montrons que g est injective, *i.e.* que :

$$\forall x, y \in F,\ g(x) = g(y) \implies x = y$$

Soit $x, y \in F$. On suppose que $g(x) = g(y)$. L'application $f : E \longrightarrow F$ est surjective et $x, y \in F$ donc il existe $a, b \in E$ tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. L'égalité $g(x) = g(y)$ se réécrit donc $g(f(a)) = g(f(b))$, soit encore $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$. Mais l'application $g \circ f$ est injective donc $a = b$. Par conséquent, $f(a) = f(b)$, *i.e.* $x = y$.

Finalement :

$$\boxed{\text{si } g \circ f \text{ est injective et si } f \text{ est surjective, alors } g \text{ est injective}}$$

Problème (autour de la formule du binôme de Newton).

Partie I : les cas $p = 0$ et $p = 1$

1. (a) D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0^n = 0 \qquad (\text{car } n > 0)}$$

(b) Pour $n = 0$, on a cette fois :

$$\boxed{S_{0,0} = (-1+1)^0 = 0^0 = 1}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k 1^{n-k} = (-x+1)^n = (1-x)^n}$$

(b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme fonction polynomiale) et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -n(1-x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k x^{k-1}}$$

(c) Pour la valeur $x = 1$, on remarque que $f'(1) = S_{n,1}$ (expression de la dérivée avec la somme). Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_{n,1} = f'(1) = -n(1-1)^{n-1} = -n \times 0^{n-1} = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 1 \ (\text{car } 0^0 = 1) \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}}$$

Partie B : étude du cas général

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a[1] :

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} = k \times \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!} = k \times \frac{n\,!}{k \times (k-1)\,!\,(n-k)\,!} &= \frac{n\,!}{(k-1)\,!\,\big((n-1)-(k-1)\big)\,!} \\ &= n \times \frac{(n-1)\,!}{(k-1)\,!\,\big((n-1)-(k-1)\big)\,!} \\ &= n\binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$$

1. On demande ici de démontrer la *formule sans nom*.

4. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Alors[2] :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)\,!}{(k-1)\,!\,\big((n-1)-(k-1)\big)\,!} + \frac{(n-1)\,!}{k\,!\,(n-1-k)\,!} \\
&= \frac{(n-1)\,!}{(k-1)\,!\,(n-k)\,!} + \frac{(n-1)\,!}{k\,!\,(n-1-k)\,!} \\
&= \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k}} \times \frac{(n-1)\,!}{(k-1)\,!\,(n-k)\,!} + \frac{(n-1)\,!}{k\,!\,(n-1-k)\,!} \times \frac{\boldsymbol{n-k}}{\boldsymbol{n-k}} \\
&= \frac{k(n-1)\,!}{k\,!\,(n-k)\,!} + \frac{(n-k)(n-1)\,!}{k\,!\,(n-k)\,!} \\
&= \frac{[k+n-k](n-1)\,!}{k\,!\,(n-k)\,!} \\
&= \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}}$$

5. On a :

$$\begin{aligned}
S_{n,p+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k \times k^p &= n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} k^p \qquad \text{(d'après la question 3.)} \\
&= n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} \right] k^p \qquad \text{(d'après la question 4.)} \\
&= n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p - n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{=0 \text{ si } k=n} k^p \\
&= n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p - n \sum_{k=0}^{\boldsymbol{n-1}} (-1)^k \binom{n-1}{k} k^p \\
&= nS_{n,p} - nS_{n-1,p}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\text{on a bien l'égalité } S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p})}$$

6. On raisonne par récurrence sur l'entier $p \in \mathbb{N}$.
   - ⋆ D'après la question 1.(a), on sait que pour tout entier $n > 0$, on a $S_{n,0} = 0$. La propriété est donc vérifiée au rang $p = 0$.
   - ⋆ Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout entier $n > p$, on a $S_{n,p} = 0$. On veut montrer que pour tout entier $n > p+1$, on a $S_{n,p+1} = 0$. Fixons donc un entier n strictement supérieur à $p+1$. En particulier, $n > p$ donc, d'après la question 5., on a $S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p})$. Or $n > p$ et $n-1 > p$ donc, par hypothèse de récurrence, on a $S_{n,p} = 0$ et $S_{n-1,p} = 0$. Ainsi, $S_{n,p+1} = 0$. La propriété est donc vraie au rang $p+1$.

   Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n > p, \qquad S_{n,p} = 0}$$

2. Il s'agit de démontrer la formule du triangle de Pascal.