Devoir Surveillé 2

un corrigé

Exercice 1 (cours).

1. (a) On sait que f est injective si :

$$\boxed{\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \implies x = y}$$

(b) Par définition, $\boxed{f(X) = \{y \in F \mid \exists x \in X,\ y = f(x)\}}$ (ou, si on préfère, $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$).

(c) Par définition, $\boxed{f^{-1}(Y) = \{x \in E \mid f(x) \in Y\}}$.

(d) On suppose que $g \circ f$ est surjective et que g est injective. Montrons que f est surjective, *i.e.* que :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$$

Soit $y \in F$. Alors $g(y) \in G$. Or $g \circ f$ est surjective de E sur G donc il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = g(y)$, ce qui se réécrit $g(f(x)) = g(y)$. Comme g est injective, cette égalité implique que $f(x) = y$. Ainsi, x est un antécédent de y par f dans E. On a donc démontré que f est surjective. Ainsi :

$$\boxed{\text{si } g \circ f \text{ est surjective et si } g \text{ est injective, alors } f \text{ est surjective}}$$

2. (a) La négation est : $\boxed{\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M}$.

(b) La négation est : $\boxed{\exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n}$.

(c) La négation est : $\boxed{\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon}$.

3. L'assertion se réécrivant sous la forme : $-1 \leqslant a$ et $a < 2$, la négation est : $\boxed{a < -1 \text{ ou } a \geqslant 2}$.

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\boxed{(a+b)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} a^k b^{6-k} = b^6 + 6ab^5 + 15a^2b^4 + 20a^3b^3 + 15a^4b^2 + 6a^5b + a^6}$$

5. (a) Par distributivité de la réunion par rapport à l'intersection, on a :

$$\boxed{X = \left[A \cup (B \cap \overline{B})\right] \cap \left[\overline{A} \cup (B \cap \overline{B})\right] = (A \cup \varnothing) \cap (\overline{A} \cup \varnothing) = A \cap \overline{A} = \varnothing}$$

(b) Démontrons l'équivalence en raisonnant par double implication.

- ⋆ Supposons que $A \setminus B = A$. Montrons alors que $B \setminus A = B$ en raisonnant par double inclusion.
  - L'inclusion $B \setminus A \subset B$ est claire (puisque $B \setminus A = B \cap \overline{A} \subset B$).
  - Soit maintenant $x \in B$. On veut montrer que $x \in B \setminus A$, *i.e.* que $x \in B \cap \overline{A}$. Par l'absurde, si $x \notin \overline{A}$, *i.e.* si $x \in A$, alors l'égalité $A \setminus B = A$ implique que $x \in A \setminus B$ et donc x n'appartient pas à B, ce qui est absurde. Ainsi, $x \notin A$ et donc $x \in B \setminus A$. Ceci prouve l'inclusion $B \subset B \setminus A$.

  Par double inclusion, on peut conclure que $B \setminus A = B$.
- ⋆ En intervertissant les rôles des ensembles A et B, on a la deuxième implication.

Ainsi :

$$\boxed{A \setminus B = A \iff B \setminus A = B}$$

Remarque : on peut aussi procéder comme suit. Si $A \setminus B = A$, *i.e.* si $A \cap \overline{B} = A$, alors :

$$\begin{aligned} B \setminus A = B \setminus (A \cap \overline{B}) = B \cap \left(\overline{A \cap \overline{B}}\right) &= B \cap \left(\overline{A} \cup B\right) \qquad \text{(lois de De Morgan)} \\ &= \left(B \cap \overline{A}\right) \cup (B \cap B) \\ &= \left(B \cap \overline{A}\right) \cup B \\ &= B \end{aligned}$$

car $B \cap \overline{A} \subset B$. La réciproque se traite de la même manière (il suffit d'intervertir les rôles joués par A et B).

6. (a) ⋆ On a :

$$S = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}} \qquad \textit{i.e.} \qquad \boxed{S = \frac{5}{4}\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right]}$$

⋆ La somme T est télescopique :

$$S = \sum_{i=0}^{n} \ln\left(\frac{i+2}{i+1}\right) = \sum_{i=0}^{n}\big(\ln(i+2)-\ln(i+1)\big) = \ln(n+2)-\ln(1) \qquad \textit{i.e.} \qquad \boxed{T = \ln(n+2)}$$

⋆ Par linéarité de la somme, on a :

$$U = 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 2\sum_{k=0}^{n} k = 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \qquad \textit{i.e.} \qquad \boxed{U = n(n+1)(2n+2)}$$

⋆ On a :

$$V = 3\sum_{j=1}^{n} j \underbrace{\sum_{i=1}^{j} 1}_{=j} = 3\sum_{j=1}^{n} j^2 \qquad \textit{i.e.} \qquad \boxed{V = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}}$$

⋆ D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$W = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}2^k 1^{\ell-k} = \sum_{\ell=0}^{n}(2+1)^{\ell} = 3^0 \times \frac{3^{n+1}-1}{3-1} \qquad \textit{i.e.} \qquad \boxed{W = \frac{3^{n+1}-1}{2}}$$

⋆ On a :

$$\begin{aligned} X = \sum_{0\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n}(-1)^k\binom{\ell}{k} &= \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^k 1^{\ell-k} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n}\big(1+(-1)\big)^{\ell} \qquad \text{(formule du binôme de Newton)} \end{aligned}$$

Ensuite, pour tout $\ell \in [\![0,n]\!]$, on a $0^{\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Donc :

$$\boxed{X = 1}$$

(b) On a :

$$P = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\prod_{\ell=1}^{2n+1}\ell}{2^n\, n\,! \times 2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}$$

et donc :

$$\boxed{P = \frac{(2n+1)\,!}{2^{2n}(n\,!)^2}}$$

Exercice 2 (des factorielles).

1. On a :

$$\boxed{u_1 = \frac{2\times 0+1}{2\times 0+2}u_0 = \frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{u_2 = \frac{2\times 1+1}{2\times 1+2}u_1 = \frac{3}{8}}$$

2. On utilise un raisonnement par récurrence (récurrence simple).
   - ⋆ On a $\dfrac{(2\times 0)\,!}{2^{2\times 0}(0\,!)^2} = \dfrac{1}{1\times 1^2} = 1 = u_0$ donc l'égalité est vraie au rang 0.

$\star$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \dfrac{(2n)\,!}{2^{2n}(n\,!)^2}$. Montrons que $u_{n+1} = \dfrac{(2n+2)\,!}{2^{2n+2}\big((n+1)\,!\big)^2}$. D'après la relation de récurrence vérifiée par la suite, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}u_n &= \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)\,!}{2^{2n}(n\,!)^2} \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{\mathbf{2n+2}}{\mathbf{2n+2}} \times \frac{(2n+1)(2n)\,!}{2(n+1)2^{2n}(n\,!)^2} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)\,!}{2^2 \times 2^{2n} \times (n+1)^2(n\,!)^2} \\
&= \frac{(2n+2)\,!}{2^{2n+2}\big((n+1)n\,!\big)^2} \\
&= \frac{(2n+2)\,!}{2^{2n+2}\big((n+1)\,!\big)^2}
\end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{(2n)\,!}{2^{2n}(n\,!)^2}}$$

Exercice 3 (calcul d'une somme).

1. On a $\dbinom{0}{0} = 1$, $\dbinom{2}{1} = 2$, $\dbinom{4}{2} = 6$ et $\dbinom{6}{3} = 20$ donc :

$$\boxed{a_0 = 1, \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = 2 \qquad \text{et} \qquad a_3 = 5}$$

De plus, $\boxed{S_0 = a_0^2 = 1}$ puis :

$$\boxed{S_1 = a_0a_1 + a_1a_0 = 2, \quad S_2 = a_0a_2 + a_1^2 + a_2a_0 = 5 \quad \text{et} \quad S_3 = a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0 = 14}$$

On remarque que $S_0 = a_1$, $S_1 = a_2$ et $S_2 = a_3$. On émet la conjecture suivante :

$$\boxed{\textbf{Conjecture :}\ \forall n \in \mathbb{N},\ S_n = a_{n+1}}$$

2. (a) Le changement d'indice $\ell = n - k$ dans la somme T_n fournit :

$$T_n = \sum_{\ell=0}^{n} (n-\ell)a_{n-\ell}a_\ell,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k)a_k a_{n-k}}$$

(b) En ajoutant les deux expressions de T_n dont on dispose, on a :

$$\begin{aligned}
2T_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} (n-k)a_k a_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \big[k + (n-k)\big] a_k a_{n-k} \qquad \text{(linéarité de la somme)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} n a_k a_{n-k}
\end{aligned}$$

et donc, en utilisant à nouveau la linéarité de la somme :

$$\boxed{2T_n = n\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = nS_n}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
(n+2)a_{n+1} = (n+2) \times \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(2n+2)\,!}{(n+1)\,!\,(n+1)\,!} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1) \times (2n)\,!}{(n+1)^2\, n\,!\, n\,!} \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1) \times (n+1)} \times \frac{(2n)\,!}{n\,!\, n\,!} \\
&= 2(2n+1) \times \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n}$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a (par linéarité de la somme) :

$$T_{n+1} + S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (k+1)a_k a_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)a_k a_{n+1-k} + a_0 a_{n+1}$$

car $a_0 = 1$. En effectuant ensuite le changement d'indice $k = \ell + 1$, on obtient :

$$T_{n+1} + S_{n+1} = \sum_{\ell=0}^{n} (\ell+2)a_{\ell+1}a_{n-\ell} + a_{n+1}$$

D'après la question 3., pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$, on a $(\ell+2)a_{\ell+1} = 2(2\ell+1)a_\ell$ donc :

$$\begin{aligned} T_{n+1} + S_{n+1} &= \sum_{\ell=0}^{n} 2(2\ell+1)a_\ell a_{n-\ell} + a_{n+1} \\ &= 4\sum_{\ell=0}^{n} \ell a_\ell a_{n-\ell} + 2\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell a_{n-\ell} + a_{n+1} \\ &= 4T_n + 2S_n + a_{n+1} \end{aligned}$$

et donc, comme $2T_n = nS_n$ (d'après la question 2.(b)), on a $4T_n = 2nS_n$ puis :

$$\boxed{T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n}$$

(b) On utilise une récurrence simple.

- ⋆ D'après la question 1., on sait que $S_0 = a_1$ donc l'égalité est vérifiée au rang 0.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $S_n = a_{n+1}$. Montrons que $S_{n+1} = a_{n+2}$.

  On a $T_{n+1} = \dfrac{n+1}{2}S_{n+1}$ d'après la question 2.(b) donc (en utilisant maintenant la question précédente) :

$$\frac{n+1}{2}S_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n = a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} = (2n+3)a_{n+1}$$

  en utilisant l'hypothèse de récurrence. Ainsi :

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = (2n+3)a_{n+1} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad S_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+3}a_{n+1} = a_{n+2}$$

  d'après la question 3. L'égalité est donc vérifiée au rang $n+1$.

On a bien démontré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = a_{n+1}}$$

Exercice 4 (autour de l'injectivité et de la surjectivité).

1. *Étude d'une application.*

(a) La fonction f est une fonction polynôme du second degré. Son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	$-\frac{9}{4}$	↗ $+\infty$

On en déduit que :

$$\boxed{f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right[}$$

On veut maintenant déterminer :

$$\begin{aligned} f^{-1}([-1, +\infty[) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [-1, +\infty[\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 \geqslant -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 \geqslant 0\} \end{aligned}$$

Les racines du trinôme $X^2 + X - 1$ étant $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, on obtient :

$$\boxed{f^{-1}([-1, +\infty[) = \left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[}$$

(b) D'après la question précédente, on a $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$ donc :

$$\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$$

Par ailleurs, on remarque que $f(1) = f(-2) = 0$ donc 0 admet deux antécédents distincts par f dans $\mathbb{R}$, à savoir 1 et -2 (on a bien $1 \neq -2$) donc :

$$\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$$

(c) Soit $y \in \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right[$. On résout l'équation $y = g(x)$ d'inconnue $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$:

$$g(x) = y \iff x^2 + x - 2 = y \iff x^2 + x - 2 - y = 0$$

Le discriminant de l'équation du second degré obtenu vaut $1 - 4(-2-y) = 9 + 4y \geqslant 0$ car $y \geqslant -\frac{9}{4}$. Celle-ci admet donc deux racines réelles (confondues dans le cas particulier $y = -\frac{9}{4}$) qui valent $\dfrac{-1 \pm \sqrt{9+4y}}{2}$. Une seule de ses racines appartient à l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, à savoir $\dfrac{-1+\sqrt{9+4y}}{2}$ (puisque $\sqrt{9+4y} \geqslant 0$) donc :

$$g(x) = y \iff x = \frac{-1+\sqrt{9+4y}}{2}$$

Finalement, y admet un unique antécédent par g dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{l'application } g \text{ est bijective de réciproque :}\\ g^{-1} : \left\{\begin{array}{ccc} \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right[& \longrightarrow & \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\\ y & \longmapsto & \dfrac{-1+\sqrt{9+4y}}{2}\end{array}\right.\end{array}}$$

2. *Application idempotente.*

(a) On raisonne par double implication.

- ⋆ Supposons que f soit injective. Montrons alors que f est surjective. Soit $y \in E$. Comme $f \circ f = f$, on a $f(f(y)) = f(y)$. Or f est injective donc $f(y) = y$. Ainsi, $y \in E$ est un antécédent de y par f dans E. On en déduit donc que f est surjective.
- ⋆ Supposons maintenant que f est surjective et montrons que f est injective. Soit donc $x, y \in E$ tel que $f(x) = f(y)$ et montrons que $x = y$. Comme f est surjective, il existe $x', y' \in E$ tels que $x = f(x')$ et $y = f(y')$. L'égalité $f(x) = f(y)$ se réécrit $f(f(x')) = f(f(y'))$. Or $f \circ f = f$ donc $f(f(x')) = f(x')$ et $f(f(y')) = f(y')$. L'égalité $f(f(x')) = f(f(y'))$ se réécrit donc $f(x') = f(y')$, ce qui signifie que $x = y$ par définition de x' et y'. Finalement, f est injective.

On a donc démontré que :

$$\boxed{f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}}$$

(b) Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. On démontre l'égalité en raisonnant par double inclusion.

- ⋆ Montrons que $f^{-1}(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(A)$.
  Soit $x \in f^{-1}(f^{-1}(A))$. Alors $f(x) \in f^{-1}(A)$ (par définition de l'image réciproque d'un ensemble), puis $f(f(x)) \in A$ (à nouveau par définition de l'image réciproque). Mais $f(f(x)) = f(x)$ (puisque $f \circ f = f$) donc la dernière appartenance se réécrit $f(x) \in A$, ce qui signifie, par définition de l'image réciproque d'un ensemble, que $x \in f^{-1}(A)$. On a donc bien l'inclusion annoncée, à savoir $f^{-1}(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(A)$.
- ⋆ Montrons maintenant que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(f^{-1}(A))$.
  Soit $x \in f^{-1}(A)$. Alors $f(x) \in A$. Mais $f(f(x)) = f(x)$ donc $f(f(x)) \in A$. Ainsi $f(x) \in f^{-1}(A)$ puis $x \in f^{-1}(f^{-1}(A))$, ce qui démontre la seconde inclusion.

Finalement :

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{P}(E), \qquad f^{-1}(f^{-1}(A)) = f^{-1}(A)}$$

Exercice 5 (étude d'une suite).

1. (a) Par symétrie de la somme, on obtient en effectuant le changement d'indice $k = n - j$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n-j}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^n}$$

(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$. L'inégalité est claire si $k = 0$ (les deux nombres mis en jeu valant 1) et, si $k \geqslant 1$, alors $1 - \dfrac{k}{n} > 0$ donc :

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}$$

L'inégalité de concavité du logarithme nous donne $\ln\left(1 - \dfrac{k}{n}\right) \leqslant -\dfrac{k}{n}$ puis, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, il vient $\mathrm{e}^{\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)} \leqslant \mathrm{e}^{-k}$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n]\!], \qquad \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-k}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant les inégalités obtenues à la question précédente, on obtient :

$$S_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\left[1 - \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}\right]$$

Comme $1 - \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1} \leqslant 1$ et $\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \geqslant 0$, on a $\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\left[1 - \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}\right] \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$ et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}}$$

2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on sait d'après l'inégalité de convexité de la fonction exponentielle que $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$, *i.e.* $\mathrm{e}^{-x} - 1 + x \geqslant 0$. Ceci démontre l'inégalité de gauche.

Démontrons maintenant l'inégalité de droite. La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2} - \mathrm{e}^{-x} + 1 - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f'(x) = x + \mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0$$

d'après l'inégalité précédente. On en déduit le tableau de variation de f suivant sur $\mathbb{R}_+$:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
f	0 $\nearrow$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a donc $f(x) \geqslant 0$, ce qui démontre l'inégalité souhaitée puisque $f(0) = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad 0 \leqslant \mathrm{e}^{-x} - 1 + x \leqslant \frac{x^2}{2}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

i. Soit $x \in [0, 1]$. On a :

$$\mathrm{e}^{-nx} - (1-x)^n = \left(\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^k (1-x)^{n-1-k}$$

Ce nombre est positif comme produit de nombres qui le sont (la positivité du facteur de gauche a été démontrée à la question précédente). Comme $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$, on a $(1-x)^{n-1-k} \leqslant \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^{n-1-k}$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ par croissance de la fonction $t \longmapsto t^{n-1-k}$ sur $\mathbb{R}_+$ (car $n - 1 - k \geqslant 0$) donc :

$$\mathrm{e}^{-nx} - (1-x)^n \leqslant (\mathrm{e}^{-x} - 1 + x) \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-(n-1)x} = (\mathrm{e}^{-x} - 1 + x) n\, \mathrm{e}^{-(n-1)x}$$

En appliquant enfin l'inégalité démontrée à la question 2.(a), on peut conclure que :

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \qquad 0 \leqslant \mathrm{e}^{-nx} - (1-x)^n \leqslant \frac{nx^2}{2}\,\mathrm{e}^{-(n-1)x}}$$

ii. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En choisissant la valeur $x = \dfrac{k}{n} \in [0, 1]$ dans les inégalités démontrées à la question précédente, on obtient bien (en utilisant le fait que $\mathrm{e}^{\frac{k}{n}} \leqslant \mathrm{e}$) :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad 0 \leqslant \mathrm{e}^{-k} - \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2n} k^2\,\mathrm{e}^{-k}}$$

(c) L'inégalité est immédiate si $k \in \{0,1,2\}$. Montrons par récurrence que pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a $k^2 \leqslant 2^{k+1}$.

- ⋆ On a $3^2 = 9$ et $2^{3+1} = 16$ donc $3^2 \leqslant 2^{3+1}$. L'inégalité est vraie pour $k = 3$.
- ⋆ Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$. On suppose que $k^2 \leqslant 2^{k+1}$. Montrons que $(k+1)^2 \leqslant 2^{k+2}$. On a :

$$2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1$$

Les racines du trinôme du second degré $X^2 - 2X - 1$ sont $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$. Or $k \geqslant 3 \geqslant 1+\sqrt{2}$ (en effet, $\sqrt{2} \leqslant 2$) donc $k^2 - 2k - 1 \geqslant 0$, *i.e.* $(k+1)^2 \leqslant 2k^2$. Par hypothèse de récurrence, on sait que $k^2 \leqslant 2^{k+1}$ donc $(k+1)^2 \leqslant 2^{k+2}$. L'inégalité est donc vraie au rang $k+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad k^2 \leqslant 2^{k+1}}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les inégalités obtenues à la question 2.(b)ii. sur les entiers $k \in [\![0,n]\!]$:

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left[\mathrm{e}^{-k} - \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \right] \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2n} \sum_{k=0}^{n} k^2 \,\mathrm{e}^{-k}$$

En utilisant la linéarité de la somme et la majoration obtenue à la question précédente, il vient :

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-k} - S_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^k,$$

i.e. :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-k} - \frac{\mathrm{e}}{n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^k \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-k}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\left(1 - \mathrm{e}^{-(n+1)}\right) - \frac{\mathrm{e}}{n} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{\mathrm{e}}} \leqslant S_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\left(1 - \mathrm{e}^{-(n+1)}\right)$$

Comme $\mathrm{e}^{-(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\dfrac{\mathrm{e}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (car $0 < 2 < \mathrm{e}$), on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\left(1 - \mathrm{e}^{-(n+1)}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\left(1 - \mathrm{e}^{-(n+1)}\right) - \frac{\mathrm{e}}{n} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{\mathrm{e}}}\right] = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge de limite } \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}}$$