Devoir Surveillé 2

durée de l'épreuve : 3h

- *La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir.*
- *Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.*
- *La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Le sujet est composé de quatre exercices et d'un problème, tous indépendants les uns des autres.

Exercice 1 (cours).

1. Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.
   (a) Donner les définitions de « f est injective », « f est surjective » et « f est bijective » à l'aide de quantificateurs.
   (b) Si X est un sous-ensemble de E, écrire en compréhension l'image directe $f(X)$ de X par f.
   (c) Si Y est un sous-ensemble de F, écrire en compréhension l'image réciproque $f^{-1}(Y)$ de Y par f.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la négation de :
   (a) $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$
   (c) $\exists\, \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la négation de $-1 \leqslant a < 2$.
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Donner la forme développée de $(a+b)^6$. *On prendra soin de calculer chaque coefficient.*
5. *Ensembles*
   Soient E un ensemble et A, B deux parties de E.
   (a) Simplifier les deux ensembles suivants :
   $$X = (A\cup B)\cap\big(A\cup\overline{B}\big)\cap\big(\overline{A}\cup B\big)\cap\big(\overline{A}\cup\overline{B}\big) \qquad \text{et} \qquad Y = (A\cap B)\cup\big(A\cap\overline{B}\big)\cup\big(\overline{A}\cap B\big)\cup\big(\overline{A}\cap\overline{B}\big)$$
   (b) Montrer que :
   $$A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$$

Exercice 2.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} u_n$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{(2n)\,!}{2^{2n}(n\,!)^2}$$

Exercice 3 (calculs de sommes).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer les cinq sommes suivantes :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{4^{k-1}}{5^k}, \qquad T = \sum_{i=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{i+1}\right), \qquad U = \sum_{k=0}^{n} k(6k+2)$$

$$V = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 3j \qquad \text{et} \qquad W = \sum_{0\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n} \binom{\ell}{k} 2^k$$

2. Calculer le produit $P = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$.

Exercice 4 (applications).

Les questions 1. *et* 2. *sont indépendantes.*

1. On considère l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x^2} \end{array} \right.$$

   (a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

   (b) (i) Calculer $f(\mathbb{R}^*)$.

   (ii) Déterminer les antécédents de 1 par l'application f.

   (iii) L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.

   (c) On considère l'application :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x^2} \end{array} \right.$$

   Démontrer que g est une application bijective et déterminer sa bijection réciproque g^{-1}.

2. *Composition et truc-jectivité*

   Soient E, F, G trois ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

   (a) On suppose que f et g sont surjectives. Montrer que $g \circ f$ est surjective.

   (b) On suppose que $g \circ f$ est injective et que f est surjective. Montrer que g est injective.

Problème (autour de la formule du binôme de Newton).

Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geqslant p$. On pose :

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p$$

L'objectif de l'exercice est calculer certaines sommes $S_{n,p}$.

On rappelle que, pour tout nombre réel x, on a $x^0 = 1$. En particulier, $0^0 = 1$.

Partie I : les cas $p = 0$ et $p = 1$

1. *On se place dans cette question dans le cas où $p = 0$.*
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{n,0} = 0$.
   Une récurrence n'est pas attendue ici.
   (b) Que vaut la somme $S_{0,0}$?
2. *On se place ici dans le cas où $p = 1$.*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :
   $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k$$
   (a) Justifier que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = (1-x)^n$$
   (b) Donner deux expressions différentes de la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire que $S_{1,1} = -1$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a $S_{n,1} = 0$.

Partie II : étude du cas général

Dans cette partie, on se donne des entiers naturels n et p tels que $n > p$.

3. Démontrer que :
   $$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$
4. Démontrer que :
   $$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

On remarquera que les deux formules établies restent valables si $k = 0$.

5. Déduire des deux questions précédentes l'égalité :
   $$S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p})$$
6. En raisonnant par récurrence sur l'entier p, montrer que :
   $$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n > p, \qquad S_{n,p} = 0$$

– FIN DE L'ÉPREUVE –