Devoir Surveillé 2

durée de l'épreuve : 3h

- *La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.*
- *Les résultats non encadrés à la* ***règle*** *ne seront pas pris en compte dans la notation.*
- *La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Le sujet comporte quatre pages et est composé de cinq exercices, tous indépendants les uns des autres.

Exercice 1 (questions de cours et assimilées).

Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes. Quand il s'agit d'énoncer une définition, il est bien entendu important de quantifier s'il y a lieu de le faire.

1. Soient E et F deux ensembles et $f \in F^E$ une application.
   (a) Donner la définition de « f est injective » à l'aide de quantificateurs.
   (b) Si X est un sous-ensemble de E, écrire en compréhension l'image directe $f(X)$ de X par f.
   (c) Si Y est un sous-ensemble de F, écrire en compréhension l'image réciproque $f^{-1}(Y)$ de Y par f.
   (d) Soient G un ensemble et $g \in G^F$. On suppose que $g \circ f$ est surjective et que g est injective. Montrer que f est surjective.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la négation de :
   (a) $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$
   (c) $\exists\, \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la négation de $-1 \leqslant a < 2$.
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Donner la forme développée de $(a+b)^6$. *On prendra soin de calculer chaque coefficient.*
5. *Ensembles*
   Soient E un ensemble et A, B deux parties de E.
   (a) Simplifier l'ensemble suivant :
   $$X = (A \cup B) \cap \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A} \cup B\right) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$$
   (b) Montrer que :
   $$A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Calculer les sommes suivantes :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{4^{k-1}}{5^k}, \qquad T = \sum_{i=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{i+1}\right), \qquad U = \sum_{k=0}^{n} k(6k+2)$$

$$V = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 3j, \qquad W = \sum_{0 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n} \binom{\ell}{k} 2^k \qquad \text{et} \qquad X = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\ell=k}^{n} \binom{\ell}{k}$$

   (b) Calculer le produit $P = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2p}\right)$.

Exercice 2 (des factorielles).

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} u_n$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{(2n)\,!}{2^{2n}(n\,!)^2}$$

Exercice 3 (calcul d'une somme).

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k}$$

1. Calculer a_0, a_1, a_2, a_3 et S_0, S_1, S_2, S_3. Quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) a_k a_{n-k}$$

   (b) En déduire que $2T_n = nS_n$.
3. Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Établir que :

$$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

   (b) En déduire que $S_n = a_{n+1}$. *On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.*

Exercice 4 (autour de l'injectivité et de la surjectivité).

Les questions 1., 2. *et* 3. *sont indépendantes les unes des autres.*

1. *Étude d'une application particulière.*
   On considère l'application :
   $$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + x - 2 \end{array} \right.$$
   (a) Déterminer les ensembles $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}([-1, +\infty[)$.
   (b) L'application f est-elle injective ? surjective ? *Justifier précisément.*
   (c) On considère l'application :
   $$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[& \longrightarrow & \left[-\frac{9}{4}, +\infty \right[\\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$
   Montrer que g est une application bijective et déterminer son application réciproque g^{-1}.

2. *Application idempotente.*
   Soient E un ensemble non vide et $f \in E^E$ une application de E dans E telle que $f \circ f = f$. *On dit que l'application f est idempotente.*
   (a) Démontrer que :
   $$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$
   (b) Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $f^{-1}(f^{-1}(A)) = f^{-1}(A)$.

Exercice 5 (étude d'une suite).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$. Le but de cet exercice est de démontrer que la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente et de déterminer sa limite.

1. (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$$
   (b) Justifier que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n]\!], \qquad \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-k}$$
   (c) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$
2. (a) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad 0 \leqslant \mathrm{e}^{-x} - 1 + x \leqslant \frac{x^2}{2}$$
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
      i. Montrer que :
$$\forall x \in [0, 1], \qquad 0 \leqslant \mathrm{e}^{-nx} - (1-x)^n \leqslant \frac{nx^2}{2}\,\mathrm{e}^{-(n-1)x}$$
      ii. En déduire que :
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad 0 \leqslant \mathrm{e}^{-k} - \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2n} k^2\,\mathrm{e}^{-k}$$
   (c) Montrer que pour tout entier naturel k, on a l'inégalité $k^2 \leqslant 2^{k+1}$.
   (d) En déduire que $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

Exercice 6 (facultatif, si tout le reste est traité).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Déterminer la limite de suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

– FIN DE L'ÉPREUVE –