Devoir Surveillé 1

un corrigé

Exercice 1 (questions de cours et assimilées).

1. (a) La fonction f est strictement décroissante sur I si :

$$\boxed{\forall x, y \in I,\ x < y \implies f(x) > f(y)}$$

(b) La fonction f est impaire sur I si :

$\star$ I est symétrique par rapport à 0 (*i.e.* : $\forall x \in I,\ -x \in I$) ;
$\star$ $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$.

(c) La fonction f est minorée sur I si :

$$\boxed{\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \geqslant m}$$

2. Les inégalités demandées sont :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{x} \geqslant 1 + x} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On résout :

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(x) = 3 \iff \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} = 3 &\iff \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} = 6 \\
&\iff \mathrm{e}^{2x} + 1 = 6\,\mathrm{e}^{x} \qquad \text{(en multipliant par } \mathrm{e}^{x} \neq 0) \\
&\iff X^2 - 6X + 1 = 0 \qquad \text{(en posant } X = \mathrm{e}^{x}) \\
&\iff X = 3 - 2\sqrt{2} \text{ ou } X = 3 + 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Or $3 + 2\sqrt{2} > 0$ et $3 - 2\sqrt{2} > 0$ car :

$$3 - 2\sqrt{2} > 0 \iff 3 > 2\sqrt{2} \iff 9 > (2\sqrt{2})^2 = 8 \qquad \text{(ce qui est vrai)}$$

donc :

$$\operatorname{ch}(x) = 3 \iff x = \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right) \text{ ou } x = \ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation est } \left\{\ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right), \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\right\}}$$

Exercice 2 (étude d'une première fonction).

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction racine carrée étant définie sur $\mathbb{R}_+$, on a[1] :

$$x \in \mathscr{D}_f \iff x^2 + x \geqslant 0 \iff x(x+1) \geqslant 0 \iff x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$$

Donc :

$$\boxed{\text{le domaine de définition de } f \text{ est } \mathscr{D}_f =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[}$$

La fonction $x \longmapsto x^2 + x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

1. Il suffit par exemple de faire un tableau de signes.

$$\boxed{\text{le domaine de dérivabilité de } f \text{ est } \Delta_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[}$$

2. On a :

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 + x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

et $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc, par composition des limites :

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x} = \lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

De plus, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ donc (d'après les opérations sur les limites) :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)}{\sqrt{x^2 + x} + x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} \qquad (\text{car } x > 0)\\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}}$$

3. (a) Soit $x \in \mathscr{D}_f$. On a :

$$\begin{aligned}\left(2x + 1 - 2\sqrt{x^2 + x}\right)\left(2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x}\right) &= (2x + 1)^2 - \left(2\sqrt{x^2 + x}\right)^2\\ &= 4x^2 + 4x + 1 - 4(x^2 + x)\\ &= 1,\end{aligned}$$

d'où le résultat en divisant par $2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x}$ (qui est nécessairement non nul car le produit précédent vaut 1). Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad 2x + 1 - 2\sqrt{x^2 + x} = \frac{1}{2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x}}}$$

(b) On sait que f est dérivable sur Δ_f et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \Delta_f, \qquad f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} - 1 &= \frac{2x + 1 - 2\sqrt{x^2 + x}}{2\sqrt{x^2 + x}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}\left(2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x}\right)}\end{aligned}$$

- ⋆ Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\sqrt{x^2 + x} \geqslant 0$ et $2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x} \geqslant 0$ (puisque $x \geqslant 0$) donc $f'(x) \geqslant 0$.
- ⋆ Si $x \in]-\infty, -1[$, alors $2x + 1 \leqslant -1$ et $-2\sqrt{x^2 + x} \leqslant 0$ tandis que $2\sqrt{x^2 + x} > 0$ donc :

$$f'(x) = \frac{2x + 1 - 2\sqrt{x^2 + x}}{2\sqrt{x^2 + x}} \leqslant 0$$

On en déduit le tableau de variations de f suivant sur son domaine de définition :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1		0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

Exercice 3 (étude d'une seconde fonction).

1. On sait, par croissances comparées, que $\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$. D'après les opérations sur les limites, on a donc :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1}$$

Par ailleurs :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[1 + x\left(1 - 2\frac{\ln(x)}{x-1}\right)\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[1 + x\left(1 - 2\frac{\ln(x)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}\right)\right]$$

Par croissances comparées, on a $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$$

2. (a) Considérons les fonctions $a : x \longmapsto \ln(x) - x + 1$ et $b : x \longmapsto \ln(x) + \dfrac{1}{x} - 1$.

⋆ La fonction a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme somme de fonctions qui le sont) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad a'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
$a'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
a	‖	↗	0	↘	

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad a(x) \leqslant a(1) = 0,$$

ce qui démontre l'inégalité de droite.

⋆ La fonction b est également dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad b'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

x	0		1		$+\infty$
$b'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
b	‖	↘	0	↗	

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad b(x) \geqslant b(1) = 0,$$

d'où l'inégalité de gauche.

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad 1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln(x) \leqslant x - 1}$$

(b) Tout d'abord, il est clair que $\lim_{x\to 1}(1+x)=2$. Soit ensuite $x\in]1,+\infty[$. Alors $\frac{2x}{x-1}\geqslant 0$ donc, en multipliant par ce nombre dans les inégalités obtenues à la question précédente, il vient :

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\times\frac{2x}{x-1}\leqslant\frac{2x\ln(x)}{x-1}\leqslant 2x$$

c'est-à-dire :

$$\forall x\in]1,+\infty[,\qquad 2\leqslant\frac{2x\ln(x)}{x-1}\leqslant 2x$$

On en déduit que $\lim_{x\to 1^+}\frac{2x\ln(x)}{x-1}=2$ en utilisant le théorème des gendarmes.

Pour la limite en 1^-, on a cette fois (puisque $x-1<0$ pour tout $x\in]0,1[$) :

$$\forall x\in]0,1[,\qquad 2x\leqslant\frac{2x\ln(x)}{x-1}\leqslant 2,$$

ce qui fournit la même limite. Finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=2-2=0}$$

3. (a) Clairement, $h(1)=0$. La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad h'(x)=2x-4+\frac{2}{x}=2\times\frac{x^2-2x+1}{x}=2\frac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0$$

x	0		1		$+\infty$
h	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

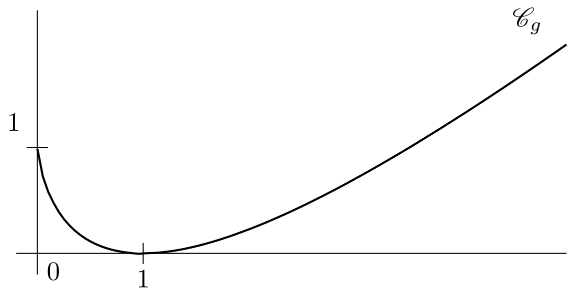
x	0		1		$+\infty$
$h(x)$	||	$-$	0	$+$	

(b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$ comme somme et quotient de fonctions qui le sont et :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\},\qquad g'(x)&=1-2\times\frac{\left(\ln(x)+x\times\frac{1}{x}\right)(x-1)-x\ln(x)}{(x-1)^2}\\&=\frac{(x-1)^2-2(\ln(x)+1)(x-1)+2x\ln(x)}{(x-1)^2}\\&=\frac{x^2-4x+3+2\ln(x)}{(x-1)^2}\\&=\frac{h(x)}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

On déduit de la question précédente le tableau de variations de g, ainsi que le graphe de g suivants :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	||	$+$	
g	|| 1	$\searrow$	0 || 0	$\nearrow$	$+\infty$



Problème (étude d'une équation fonctionnelle)

Partie I : étude de la fonction φ

1. (a) L'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a de plus :

$$\varphi(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x} - 1}{\mathrm{e}^{-2x} + 1} \times \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{2x}}{1 + \mathrm{e}^{2x}} = -\frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{1 + \mathrm{e}^{2x}} = -\varphi(x)$$

Donc :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est impaire sur } \mathbb{R}}$$

(b) La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables (le dénominateur ne s'annulant pas) et :

$$\varphi'(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^{2x}\,(\mathrm{e}^{2x} + 1) - 2\,\mathrm{e}^{2x}\,(\mathrm{e}^{2x} - 1)}{(\mathrm{e}^{2x} + 1)^2} = \frac{4\,\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x} + 1)^2} > 0$$

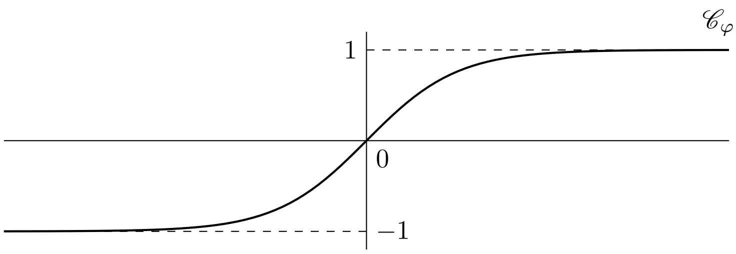
Donc :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est (strictement) croissante sur } \mathbb{R}}$$

Ensuite, comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = -1$, on a :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -1 \text{ et, par imparité de } \varphi \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ on a aussi } \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1}$$

(c) **Graphe de φ sur $\mathbb{R}$:**



(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\varphi(x) + 1 = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} + 1 = \frac{2\,\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} + 1} > 0$$

et :

$$1 - \varphi(x) = 1 - \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = \frac{2}{\mathrm{e}^{2x} + 1} > 0$$

Par conséquent, $\varphi(x) > -1$ et $\varphi(x) < 1$ donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -1 < \varphi(x) < 1}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(x)^2 = 1 - \frac{(\mathrm{e}^{2x} - 1)^2}{(\mathrm{e}^{2x} + 1)^2} &= \frac{(\mathrm{e}^{2x} + 1)^2 - (\mathrm{e}^{2x} - 1)^2}{(\mathrm{e}^{2x} + 1)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{4x} + 2\,\mathrm{e}^{2x} + 1 - (\mathrm{e}^{4x} - 2\,\mathrm{e}^{2x} + 1)}{(\mathrm{e}^{2x} + 1)^2} \\ &= \frac{4\,\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x} + 1)^2} \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression de φ' obtenue à la question 1.(b) donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x) = 1 - \varphi(x)^2}$$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction ln étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$x \in \mathscr{D}_\psi \iff \begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{1+x}{1-x} > 0 \end{cases} \iff x \in]-1, 1[,$$

en utilisant un tableau de signes. Ainsi :

$$\boxed{\text{le domaine de définition de } \psi \text{ est } \mathscr{D}_\psi =]-1,1[}$$

(b) Soit $x \in]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) = \frac{\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} - 1}{\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} + 1} &= \frac{\frac{1+x}{1-x} - 1}{\frac{1+x}{1-x} + 1} \\ &= \frac{1+x-(1-x)}{1+x+1-x} \\ &= x\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad (\varphi \circ \psi)(x) = x}$$

Partie II : étude d'une première équation fonctionnelle

4. On sait que[2] :

$$\boxed{\text{la fonction } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est dérivable en 0 si le taux d'accroissement } \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \text{ admet une limite finie quand } x \text{ tend vers 0 (ce nombre est alors appelé le nombre dérivé de } f \text{ en 0, noté } f'(0))}$$

5. Comme f vérifie $(\mathscr{E}_1)$, on a en choisissant $x = 0$:

$$f(2 \times 0) = 2f(0) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad f(0) = 2f(0)$$

Ainsi :

$$\boxed{f(0) = 0}$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

(a) On sait que $f(0) = 0$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f(0)}{\frac{x}{2^n} - 0}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$ et on sait que f est dérivable en 0 donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{X\to 0} \frac{f(X)-f(0)}{X-0} = f'(0)}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En évaluant $(\mathscr{E}_1)$ au point $\dfrac{x}{2^{n+1}}$, on a :

$$f\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

et donc, en divisant par $\dfrac{x}{2^n} \neq 0$, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n}$$

7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante égale à sa limite, à savoir $f'(0)$. En particulier, $u_0 = f'(0)$, c'est-à-dire $\dfrac{f(x)}{x} = f'(0)$. Ceci montre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = f'(0)x$$

Comme de plus cette égalité est vraie pour $x = 0$ (puisque $f(0) = 0$ d'après la question 5.), on peut conclure que :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } f(x) = f'(0)x \text{ (ainsi, } \alpha = f'(0) \in \mathbb{R} \text{ convient)}}$$

8. On a montré que si f est solution du problème, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \longmapsto \alpha x$. Réciproquement, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction de la forme précédente. Alors f est dérivable en 0 (elle est même dérivable sur $\mathbb{R}$) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = \alpha \times (2x) = 2\alpha x = 2f(x)$$

donc f est solution de $(\mathscr{E}_1)$. On peut donc conclure que :

2. Il s'agit d'une question de cours.

l'ensemble des fonctions dérivables en 0 et vérifiant $(\mathscr{E}_1)$ est

$$\boxed{\left\{ f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha x \end{array} \right. \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$$

Partie III : étude d'une deuxième équation fonctionnelle

9. La fonction φ est dérivable en 0 (elle est même dérivable sur $\mathbb{R}$) et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{2\varphi(x)}{1+\varphi(x)^2} = \frac{2 \times \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}}{1+\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\right)^2} = \frac{2(\mathrm{e}^{2x}-1)(\mathrm{e}^{2x}+1)}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2+(\mathrm{e}^{2x}-1)^2} = \frac{2(\mathrm{e}^{4x}-1)}{2\mathrm{e}^{4x}+2}$$
$$= \varphi(2x)$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est solution du problème}}$$

10. Comme f vérifie $(\mathscr{E}_2)$, on a en choisissant $x = 0$:

$$f(0) = \frac{2f(0)}{1+f(0)^2} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad f(0)\left(1 - \frac{2}{1+f(0)^2}\right) = 0$$

On a donc $f(0) = 0$ ou $\dfrac{2}{1+f(0)^2} = 1$ et la deuxième égalité fournit $f(0)^2 = 1$, c'est-à-dire $f(0) = -1$ ou $f(0) = 1$. Ainsi :

$$\boxed{f(0) \in \{-1, 0, 1\}}$$

11. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après $(\mathscr{E}_2)$ (au point $\frac{x}{2}$), on a :

$$f(x) = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+f\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

donc :

$$1 - f(x) = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2f\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{1+f\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\left(f\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)^2}{1+f\left(\frac{x}{2}\right)^2} \geqslant 0,$$

et, de la même façon, on trouve que :

$$1 + f(x) = \frac{\left(f\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)^2}{1+f\left(\frac{x}{2}\right)^2} \geqslant 0$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -1 \leqslant f(x) \leqslant 1}$$

12. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$g(2x) = (\psi \circ f)(2x) = \psi(f(2x)) = \psi\left(\frac{2f(x)}{1+f(x)^2}\right)$$

car f vérifie $(\mathscr{E}_2)$. En utilisant maintenant l'expression de ψ, il vient :

$$g(2x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{2f(x)}{1+f(x)^2}}{1-\frac{2f(x)}{1+f(x)^2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+f(x)^2+2f(x)}{1+f(x)^2-2f(x)}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(1+f(x))^2}{(1-f(x))^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \ln\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)$$
$$= 2\psi(f(x))$$
$$= 2g(x)$$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(2x) = 2g(x)}$$

13. La fonction g est dérivable en 0 (d'après ce qui admis dans l'encadré de l'énoncé) et vérifie $(\mathscr{E}_1)$. D'après la question 7., il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \alpha x,$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \psi(f(x)) = \alpha x$$

En composant par φ, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(\psi(f(x))) = \varphi(\alpha x)$$

soit encore, d'après la question 3.(b) :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \varphi(\alpha x) = \frac{\mathrm{e}^{2\alpha x} - 1}{\mathrm{e}^{2\alpha x} + 1}}$$

14. On continue le raisonnement par analyse-synthèse mené à partir de la question 10.
   - ⋆ On vient de montrer que, si f est une fonction dérivable en 0, s'annulant en 0 et vérifiant $(\mathscr{E}_2)$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2\alpha x} - 1}{\mathrm{e}^{2\alpha x} + 1}$$
   - ⋆ **Synthèse.** Réciproquement, soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{2\alpha x} - 1}{\mathrm{e}^{2\alpha x} + 1} = \varphi(\alpha x) \end{array} \right.$. La fonction f s'annule clairement en 0, est dérivable en 0 (elle est en fait dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont) et elle vérifie $(\mathscr{E}_2)$ car on sait que (d'après la question 9.) :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(2t) = \frac{2\varphi(t)}{1 + \varphi(t)^2}$$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors, pour $t = \alpha x$:
   $$f(2x) = \varphi(2\alpha x) = \frac{2\varphi(\alpha x)}{1 + \varphi(\alpha x)^2} = \frac{2f(x)}{1 + f(x)^2}$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{les fonctions } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dérivables en 0, telles que } f(0) = 0 \text{ et vérifiant } (\mathscr{E}_2) \text{ sont les fonctions} \\ \text{de la forme} \\ \qquad f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{2\alpha x} - 1}{\mathrm{e}^{2\alpha x} + 1} \end{array} \right., \\ \text{où } \alpha \in \mathbb{R}. \end{array}}$$