

DEVOIR SURVEILLÉ 1

durée de l'épreuve : 3h

- La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir.
- Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet est composé de quatre exercices et d'un problème, tous indépendants les uns des autres.

Exercice 1 (cours).

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Donner la définition de :
 - (a) « f est paire sur I » ;
 - (b) « f est strictement croissante sur I » ;
 - (c) « f est minorée sur I » ;
 - (d) « f admet un maximum en a sur I », où $a \in I$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = 1$.
3. La fonction ch est-elle majorée sur $\mathbb{R}$? minorée ? bornée ? Justifier.

Exercice 2 (une récurrence).

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + 2^n$$

Exercice 3 (étude d'une fonction).

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x+3}{2x-4}}$.

1. Déterminer le domaine de définition, noté $\mathcal{D}_f$, de f .
2. Donner le domaine de dérivabilité de f et calculer f' .
3. Déterminer le sens de variations de f et calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

On conclura en dressant le tableau de variations de f .

Exercice 4 (croissances comparées).

L'objectif de cet exercice est de calculer les deux limites suivantes :

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$$

1. *Croissances comparées avec le logarithme.*

- (a) Étudier les variations de la fonction $f : t \mapsto t - \ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (b) En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(t) \leq t \quad (*)$$

- (c) En déduire que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

- (d) Conclure quant à la valeur de la limite ℓ .

2. *Et avec l'exponentielle ?*

En utilisant ce qui précède et une écriture sous forme exponentielle, déterminer la valeur de L .

Problème.

Le but du problème est l'étude d'une fonction notée g_k , où k est **une constante réelle fixée** telle que :

$$0 < k < e$$

Dans la partie A, on met en évidence certaines propriétés d'une fonction f qui seront utilisées dans la partie B.

Partie A : étude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (2 - x)e^x - k$$

- 1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2. (a) Étudier le sens de variations de f et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
(b) Calculer $f(1)$ et donner son signe.
- 3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet exactement deux solutions, l'une appartenant à $]-\infty, 1[$ et l'autre appartenant à $]1, +\infty[$.
Dans la suite, on notera α_k la solution appartenant à $]-\infty, 1[$ et β_k celle appartenant à $]1, +\infty[$.
(b) En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.
- 4. En exploitant l'égalité $f(\alpha_k) = 0$, montrer que :

$$e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$$

On démontrerait de la même manière (et il n'est pas demandé de le faire) que :

$$e^{\beta_k} - k\beta_k = (e^{\beta_k} - k)(\beta_k - 1)$$

Partie B : étude d'une fonction g_k

5. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = e^x - kx$$

- (a) Étudier le sens de variations de u sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de u .
- (b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x - kx > 0$$

On rappelle que $0 < k < e$.

6. Soit g_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \frac{e^x - k}{e^x - kx}$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de g_k dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

- (a) Déterminer les limites de g_k en $-\infty$ et en $+\infty$.
- (b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'_k(x) = \frac{kf(x)}{(e^x - kx)^2},$$

la fonction f ayant été introduite dans la partie A.

- (c) En déduire le tableau de variations de g_k sur $\mathbb{R}$. Calculer $g_k(1)$.

7. On nomme M_k et N_k les points de la courbe $\mathcal{C}_k$ d'abscisses respectives α_k et β_k .

- (a) En utilisant la question 4. (partie A), montrer que :

$$g_k(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k - 1}$$

On montrerait de la même manière (et il n'est pas demandé de le faire) que $g_k(\beta_k) = \frac{1}{\beta_k - 1}$.

- (b) Déduire de la question précédente que lorsque k varie, les points M_k et N_k sont sur une même courbe fixe $\mathcal{H}$ dont on donnera une équation.

8. Représentations graphiques pour des valeurs particulières de k .

- (a) Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
- (b) Prouver que $\alpha_2 = 0$.
- (c) Représenter graphiquement les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{H}$ sur le même graphique.

On donne $\alpha_1 = -1, 1$, $\beta_1 = 1, 8$ et $\beta_2 = 1, 6$.

– FIN DE L'ÉPREUVE –