

DEVOIR SURVEILLÉ 1

durée de l'épreuve : 3h

- La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.
- Les résultats non encadrés à la règle ne seront pas pris en compte dans la notation.
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet est composé de trois exercices et d'un problème, tous indépendants.

Exercice 1 (questions de cours et assimilées).

- Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
 - Donner la définition de « f est une fonction strictement décroissante sur I ».
 - Donner la définition de « f est une fonction impaire sur I ».
 - Donner la définition de « f est une fonction minorée sur I ».
- Énoncer les inégalités de concavité/convexité des fonctions \ln et \exp , en précisant les domaines d'existence.
- Résoudre l'équation $\operatorname{ch}(x) = 3$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (étude d'une première fonction).

On considère la fonction f d'expression $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$.

- Déterminer les domaines de définition \mathcal{D}_f et de dérivabilité Δ_f de f , en les justifiant.
- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad 2x + 1 - 2\sqrt{x^2 + x} = \frac{1}{2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x}}$$

- En déduire le sens de variation de la fonction f sur son domaine de définition. *On conclura en dressant le tableau de variations de f .*

Exercice 3 (étude d'une seconde fonction).

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad g(x) = 1 + x - \frac{2x \ln(x)}{x-1}$$

- Déterminer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
- On cherche dans cette question les limites de g en 1^- et en 1^+ .

(a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

Indication : on démontrera séparément chacune des deux inégalités.

(b) En déduire les limites de g en 1^- et en 1^+ .

- Dans cette dernière question, on s'intéresse à l'allure de la courbe représentative de g .

(a) Soit la fonction $h : x \mapsto x^2 - 4x + 3 + 2\ln(x)$. Préciser la valeur de $h(1)$ et étudier h .
On donnera notamment le tableau de variations ainsi que le signe de cette fonction sur son domaine de définition.

(b) En déduire le sens de variation de g , dresser son tableau de variations, et proposer une représentation graphique de g sur son domaine de définition.

Problème (étude d'une équation fonctionnelle).

Dans tout ce problème, on considère la fonction :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \end{cases}$$

Partie I : étude de la fonction φ

- Étudier la parité de la fonction φ sur \mathbb{R} .
 - Étudier les variations de φ sur \mathbb{R} et préciser les limites de φ en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - Représenter graphiquement la fonction φ .
 - Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 < \varphi(x) < 1$$

- Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = 1 - \varphi(x)^2$$

- On considère la fonction $\psi : x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.

(a) Préciser le domaine de définition \mathcal{D}_ψ de ψ .
(b) Calculer $(\varphi \circ \psi)(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Partie II : étude d'une première équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = 2f(x) \quad (\mathcal{E}_1)$$

4. Donner la définition de : « $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en 0 ».

On considère maintenant une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable en 0, et vérifiant (\mathcal{E}_1) .

5. Calculer $f(0)$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$$

(a) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

(b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n .

7. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha x$$

8. Conclure quant à l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 et vérifiant (\mathcal{E}_1) .

Partie III : étude d'une deuxième équation fonctionnelle

Le but de cette dernière partie est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + f(x)^2} \quad (\mathcal{E}_2)$$

9. Vérifier que la fonction φ est solution du problème.

On considère désormais une fonction f quelconque solution du problème (i.e. dérivable en 0 et vérifiant (\mathcal{E}_2)).

10. Montrer que $f(0) = 0$ ou $f(0) = -1$ ou $f(0) = 1$.

11. En exprimant $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq f(x) \leq 1$$

On se place maintenant dans le cas où $f(0) = 0$. On **admettra** alors que, dans ce cas, la fonction f est nécessairement telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 < f(x) < 1$$

La fonction $g = \psi \circ f$ est donc bien définie sur \mathbb{R} .

12. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(2x) = 2g(x)$$

13. En utilisant les parties précédentes, justifier alors que :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{2\alpha x} - 1}{e^{2\alpha x} + 1}$$

14. Conclure quant à l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0, **s'annulant en 0**, et vérifiant (\mathcal{E}_2) .

– FIN DE L'ÉPREUVE –