

DEVOIR SURVEILLÉ 10

durée de l'épreuve : 4h

- La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir.
- | |
|---|
| Les résultats non encadrés à la règle ne seront pas pris en compte dans la notation. |
|---|
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1 (étude d'une famille de séries).

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u(n, p) = \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+p)}$$

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n \geq 1} u(n, p)$ est convergente.

Pour tout entier naturel p non nul, on note $\sigma(p)$ la somme de cette série, i.e. :

$$\sigma(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u(n, p)$$

2. (a) Calculer $\sigma(1)$.
(b) Calculer $\sigma(2)$.
3. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u(n, p-1) - u(n+1, p-1) = pu(n, p)$$

4. En déduire la valeur de $\sigma(p)$ pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Exercice 2 (calcul d'une distance).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des nombres réels. Pour tous $P, Q \in E$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E si et seulement si les nombres réels $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts.

2. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (on écrira l'inégalité avec le symbole $\sum$).
3. Déterminer (sans calculs) une base orthonormée de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
4. On pose $H = \left\{ P \in E \left| \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \right. \right\}$.
 - (a) Justifier que H est un hyperplan de E . Déterminer un vecteur normal à H .
 - (b) Soit $Q \in E$. Déterminer la distance de Q à H .

Exercice 3 (développement asymptotique d'une suite).

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k}$$

1. **Étude de la nature de la suite** $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- (a) Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.
(b) En déduire que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 4, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx$$

- (c) En déduire l'existence de trois constantes réelles positives A , B et C telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on ait :

$$\frac{\ln(n+1)^2}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln(n)^2}{2} - C$$

- (d) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2. **Recherche d'un équivalent de S_n .**

- (a) Montrer que $\ln(n+1)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)^2$.
(b) En déduire que un équivalent S_n quand n tend vers $+\infty$.

3. **Étude asymptotique de la suite u définie par :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - \frac{\ln(n)^2}{2}$$

- (a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
(b) En déduire que la suite u converge.

Dans toute la suite de l'exercice, la limite de la suite u sera notée ℓ .

4. **Une application.**

On considère la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k}$$

- (a) Prouver que pour tout entier naturel non nul n , on a

$$A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

- (b) On admet qu'il existe un réel γ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

En déduire que la suite $(A_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ .

- (c) En déduire que la suite $(A_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ .
(d) Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 (endomorphismes préservant le produit scalaire).

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n .

Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $\langle x|y \rangle$ et $\|x\|$ représente la norme du vecteur x .

Pour tout vecteur u non nul de E , on note φ_u l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall x \in E, \quad \varphi_u(x) = 2 \frac{\langle x|u \rangle}{\langle u|u \rangle} u - x.$$

1. Étude de l'application φ_u

- (a) Montrer que φ_u est un endomorphisme de E .
- (b) En calculant $\varphi_u \circ \varphi_u$, montrer que φ_u est un automorphisme de E et déterminer φ_u^{-1} .
- (c) Soit $x \in E$. Simplifier au maximum le produit scalaire $\langle \varphi_u(x)|\varphi_u(x) \rangle$.
- (d) Montrer que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle \varphi_u(x)|\varphi_u(y) \rangle = \langle x|y \rangle.$$

- (e) On note D_u la droite vectorielle de base u et $H_u = D_u^\perp$.
Déterminer l'image de D_u par φ_u .
Montrer que H_u est stable par φ_u .

2. Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et constitué des

vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.

- (a) Donner la dimension et une base orthonormale de $H^\perp$.
- (b) Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur $H^\perp$ puis celle de la projection orthogonale sur H .
- (c) Soit v un vecteur unitaire de $H^\perp$.
Écrire la matrice de φ_v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

– FIN DE L'ÉPREUVE –