

DEVOIR SURVEILLÉ 10

durée de l'épreuve : 4h

- La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.
- Les résultats non encadrés à la règle ne seront pas pris en compte dans la notation.
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte quatre pages et est composé de trois exercices, tous indépendants les uns des autres.

Exercice 1 (étude d'une série paramétrée).

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_{n,p} = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$$

On souhaite déterminer les valeurs de $p \in \mathbb{N}$ pour lesquelles la série $\sum_{n \geq 0} u_{n,p}$ est convergente. En cas de convergence, la somme de la série est notée α_p , c'est-à-dire :

$$\alpha_p = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$$

1. Préciser la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_{n,p}$ dans les cas $p = 0$ et $p = 1$.
2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_{n,2}$ est convergente et calculer sa somme α_2 .

Dans la suite de l'exercice, on suppose que l'entier p est supérieur ou égal à 2.

3. Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n,p} = \frac{p!}{p-1} \left(\frac{1}{\prod_{k=1}^{p-1} (n+k)} - \frac{1}{\prod_{k=2}^p (n+k)} \right)$$

4. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_{n,p}$ est convergente et déterminer la valeur de α_p .

Exercice 2 (algèbre bilinéaire).

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

I – Calcul d’une distance

On définit, sur l’espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}[X]$, l’application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par :

$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

On identifie ici polynôme et fonction polynomiale associée.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. Vérifier que $1 \perp X$ et $X \perp X^2$. La famille $(1, X, X^2)$ est-elle orthogonale ? Justifier.
3. Déterminer une base orthogonale de l’espace euclidien $(\mathbb{R}_2[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
4. Déterminer la distance $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$ du polynôme X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

II – Isométries vectorielles

On considère dans cette deuxième partie un espace euclidien (quelconque) $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de norme associée notée $\| \cdot \|$.

Définition (isométrie vectorielle) Soit $u \in E^E$. On dit que u est une *isométrie vectorielle* de E si u vérifie les deux propriétés suivantes :

- ★ u est un endomorphisme de E ;
- ★ u préserve la norme, i.e. :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l’ensemble des isométries vectorielles de E .

5. *Un exemple.*

Soit a un vecteur *unitaire* de E . On considère l’application :

$$s_a : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 2\langle x, a \rangle a - x \end{cases}$$

- (a) Montrer que $s_a \in \mathcal{O}(E)$.
- (b) Calculer $s_a \circ s_a$. En déduire que s_a est un automorphisme de E et déterminer s_a^{-1} .

On souhaite maintenant établir certaines propriétés vérifiées par les isométries vectorielles.

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$.

6. Montrer que u est un automorphisme de E .
7. (a) Montrer que :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$$

- (b) En déduire que u préserve le produit scalaire, i.e. que :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Exercice 3 (calcul de la somme d'une série alternée).

On pourra utiliser sans justification le fait que $2 < e = e^1 < 3$.

Le but de cet exercice est de montrer que la série de terme général :

$$u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \quad (\text{pour } n \geq 1)$$

est convergente, et de calculer sa somme. Celle-ci s'exprime en fonction de la constante γ d'Euler qui est définie dans la partie II.

I – Convergence de la série

1. Étudier les variations de la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$. On dressera le tableau de variations de f en précisant les limites aux bords de son ensemble de définition.
2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente.
3. La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est-elle absolument convergente ? Justifier.

II – La constante d'Euler

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$.

4. Rappeler les développements limités à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.
5. Montrer alors que :

$$w_n - w_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

6. En déduire que la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

La limite de la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est notée γ ; elle est appelée *constante d'Euler* et est donc définie par :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \approx 0,5772156649\dots$$

III – Calcul de la somme de la série

7. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} \right) - \frac{\ln(n)^2}{2}$.

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, on a :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \frac{\ln(n)}{n}$$

(b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est décroissante puis convergente.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

On pourra éventuellement utiliser un raisonnement par récurrence.

9. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n} = \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{\ln(2)^2}{2} - \ln(2) \ln(n)$$

10. Conclure alors que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{\ln(2)^2}{2}$$

– FIN DE L'ÉPREUVE –