

DEVOIR SURVEILLÉ 10

un corrigé

Exercice 1 (étude d'une série paramétrée).

1. On traite séparément chacun des deux cas.

★ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\binom{n}{n} = 1$ donc $u_{n,0} = 1$. La suite $(u_{n,0})_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 donc :

la série $\sum_{n \geq 0} u_{n,0}$ est (grossièrement) divergente

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\binom{n+1}{n} = \binom{n+1}{1} = n+1$$

et on sait que la série de Riemann $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}$ (il s'agit de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$) est divergente. Par conséquent :

la série $\sum_{n \geq 0} u_{n,1}$ est divergente

2. Notons $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} u_{n,2}$. Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{k+2}{k}} = \sum_{k=0}^n \frac{2}{(k+2)(k+1)} = 2 \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

car la dernière somme est télescopique. Ainsi, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite 2 donc :

la série $\sum_{n \geq 0} u_{n,2}$ est convergente de somme $\alpha_2 = 2$

3. On suppose que $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a (en réduisant au même dénominateur) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\prod_{k=1}^{p-1} (n+k)} - \frac{1}{\prod_{k=2}^p (n+k)} &= \frac{(n+p) - (n+1)}{(n+p)(n+p-1) \cdots (n+2)(n+1)} \\ &= (p-1) \times \frac{1}{\prod_{k=1}^p (n+k)} \end{aligned}$$

Or :

$$\binom{n+p}{n} = \frac{(n+p)!}{n!p!} = \frac{1}{p!} \times \prod_{k=1}^p (n+k)$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n,p} = \frac{p!}{p-1} \left(\frac{1}{\prod_{k=1}^{p-1} (n+k)} - \frac{1}{\prod_{k=2}^p (n+k)} \right)$$

4. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a (la somme est télescopique) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N u_{n,p} &= \frac{p!}{p-1} \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{(n+p-1) \cdots (n+1)} - \frac{1}{(n+p) \cdots (n+2)} \right) \\ &= \frac{p!}{p-1} \left(\frac{1}{(p-1)!} - \frac{1}{(N+p) \cdots (N+2)} \right) \end{aligned}$$

Comme $(N+p) \cdots (N+2) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$, on en déduit que :

$$\sum_{n=0}^N u_{n,p} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{p!}{p-1} \times \frac{1}{(p-1)!} = \frac{p}{p-1} \in \mathbb{R}$$

Par conséquent :

la série $\sum_{n \geq 0} u_{n,p}$ est convergente de somme $\alpha_p = \frac{p}{p-1}$

Exercice 2 (algèbre bilinéaire).

I – Calcul d’une distance

1. Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

★ Soient $P, Q, R \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \langle P + \lambda Q, R \rangle &= \int_{-1}^1 (P + \lambda Q)(t)R(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (P(t) + \lambda Q(t))R(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (P(t)R(t) + \lambda Q(t)R(t)) dt \\ &= \int_{-1}^1 P(t)R(t) dt + \lambda \int_{-1}^1 Q(t)R(t) dt \quad (\text{linéarité de l'intégrale}) \\ &= \langle P, R \rangle + \lambda \langle Q, R \rangle \end{aligned}$$

Ainsi, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable.

★ Pour tous $P, Q \in E$, on a (en utilisant la commutativité du produit dans \mathbb{R}) :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt = \int_{-1}^1 Q(t)P(t) dt = \langle Q, P \rangle$$

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc symétrique; comme elle est de plus linéaire par rapport à la première variable, elle est bilinéaire.

★ Soit $P \in E$. La fonction $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur le segment $[-1, 1]$ donc, par positivité de l'intégrale, on a :

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \geq 0$$

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc positive.

★ Soit $P \in E$. On suppose que :

$$\langle P, P \rangle = 0 \quad \text{i.e.} \quad \int_{-1}^1 P(t)^2 dt = 0$$

La fonction $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur le segment $[-1, 1]$ et $-1 < 1$ donc, d'après le théorème de nullité de l'intégrale, on a :

$$(\forall t \in [-1, 1], P(t)^2 = 0) \quad \text{i.e.} \quad (\forall t \in [-1, 1], P(t) = 0)$$

Le polynôme P admet donc une infinité de racines (en l'occurrence les éléments de $[-1, 1]$) donc P est le polynôme nul, i.e. $P = 0_E$. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc définie.

Finalement :

l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E

2. On a :

$$\langle 1, X \rangle = \int_{-1}^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0 \quad \text{et} \quad \langle X, X^2 \rangle = \int_{-1}^1 t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0$$

donc :

$1 \perp X$ et $X \perp X^2$

Par ailleurs :

$$\langle 1, X^2 \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} \neq 0$$

donc les vecteurs 1 et X^2 ne sont pas orthogonaux. Ainsi :

la famille $(1, X, X^2)$ n'est pas orthogonale

3. On utilise l'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. On pose :

- ★ $P_1 = 1$;
- ★ $P_2 = X - \frac{\langle X, 1 \rangle}{\|1\|^2} = X$ car $\langle X, 1 \rangle = 0$;
- ★ et $P_3 = X^2 - \frac{\langle X^2, 1 \rangle}{\|1\|^2} - \frac{\langle X^2, X \rangle}{\|X\|^2} X = X^2 - \frac{1}{3}$ car :

$$\langle X^2, X \rangle = 0, \quad \langle X^2, 1 \rangle = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \|1\|^2 = \int_{-1}^1 1 dt = 2$$

Ainsi :

la famille (P_1, P_2, P_3) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$, où :

$$P_1 = 1, \quad P_2 = X \quad \text{et} \quad P_3 = X^2 - \frac{1}{3}$$

4. D'après le théorème de la projection orthogonale, on a $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \|X^3 - p(X^3)\|$, où $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ est le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_2[X]$. Or on sait que :

$$p(X^3) = \frac{\langle X^3, 1 \rangle}{\|1\|^2} + \frac{\langle X^3, X \rangle}{\|X\|^2} X + \frac{\langle X^3, X^2 - \frac{1}{3} \rangle}{\|X^2 - \frac{1}{3}\|^2} \left(X^2 - \frac{1}{3} \right)$$

Comme les fonctions $t \mapsto t^3$ et $t \mapsto t^3 \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)$ sont impaires sur $[-1, 1]$, on a :

$$\langle X^3, 1 \rangle = \left\langle X^3, X^2 - \frac{1}{3} \right\rangle = 0$$

De plus :

$$\langle X^3, X \rangle = \int_{-1}^1 t^4 dt = \left[\frac{t^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

Ainsi, $p(X^3) = \frac{3}{5}X$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \|X^3 - p(X^3)\|^2 &= \int_{-1}^1 \left(t^3 - \frac{3}{5}t \right)^2 dt = \int_{-1}^1 \left(t^6 - \frac{6}{5}t^4 + \frac{9}{25}t^2 \right) dt \\ &= \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{18}{75} \end{aligned}$$

Finalement :

$$d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \sqrt{\frac{8}{175}}$$

II – Isométries vectorielles

5. (a) Soit $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$.

★ Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x, y \in E$. Alors, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} s_a(x + \lambda y) &= 2\langle x + \lambda y, a \rangle a - (x + \lambda y) = 2\langle x, a \rangle + 2\lambda\langle y, a \rangle - x - \lambda y \\ &= 2\langle x, a \rangle - x + \lambda(2\langle y, a \rangle - y) \\ &= s_a(x) + \lambda s_a(y) \end{aligned}$$

★ Pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \|s_a(x)\|^2 &= \langle s_a(x), s_a(x) \rangle = \langle 2\langle x, a \rangle a - x, 2\langle x, a \rangle a - x \rangle \\ &= 4(\langle x, a \rangle)^2 \langle a, a \rangle - 2\langle x, a \rangle \langle x, a \rangle - 2\langle x, a \rangle \langle a, x \rangle + \langle x, x \rangle \end{aligned}$$

par bilinéarité du produit scalaire. Comme a est unitaire, on a $\langle a, a \rangle = \|a\|^2 = 1$ et, par symétrie du produit scalaire, on a $\langle a, x \rangle = \langle x, a \rangle$ donc :

$$\|s_a(x)\|^2 = 4(\langle x, a \rangle)^2 - 4(\langle x, a \rangle)^2 + \|x\|^2 = \|x\|^2 \quad \text{donc} \quad \|s_a(x)\| = \|x\|$$

car $\|s_a(x)\|, \|x\| \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, l'application s_a préserve le produit scalaire.

On peut donc conclure que :

s_a est une isométrie vectorielle de E

(b) Soit $x \in E$. On a :

$$(s_a \circ s_a)(x) = s_a(s_a(x)) = s_a(2\langle x, a \rangle a - x) = 2\langle x, a \rangle s_a(a) - s_a(x) \quad (\text{car } s_a \text{ est linéaire})$$

Comme a est un vecteur unitaire, on a :

$$s_a(a) = 2 \underbrace{\langle a, a \rangle}_{=1} a - a = 2a - a = a$$

donc :

$$(s_a \circ s_a)(x) = 2\langle x, a \rangle a - (2\langle x, a \rangle a - x) = x$$

Par conséquent :

$$\boxed{s_a \circ s_a = \text{Id}_E \text{ donc } s_a \in \text{GL}(E) \text{ et } s_a^{-1} = \text{Id}_E}$$

6. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Montrons que u est injective. Soit $x \in \text{Ker}(u)$. Alors $u(x) = 0_E$ donc $\|u(x)\| = 0$. Or u est une isométrie vectorielle de E donc $\|x\| = \|u(x)\| = 0$. La norme étant définie, on a nécessairement $x = 0_E$. Ceci démontre l'inclusion $\text{Ker}(u) \subset \{0_E\}$. Comme $\text{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E , on a aussi $\{0_E\} \subset \text{Ker}(u)$. Par conséquent, on a l'égalité $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$ et donc u est injective.

Comme de plus u est un endomorphisme de l'espace vectoriel E qui est de dimension finie, on peut conclure que :

$$\boxed{u \text{ est un automorphisme de } E}$$

7. (a) Soient $x, y \in E$. Par bilinéarité (et symétrie) du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \underbrace{\langle y, x \rangle}_{=\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

et, de la même façon,

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Par conséquent :

$$\boxed{\forall x, y \in E, \quad \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} = \langle x, y \rangle}$$

(b) Soient $x, y \in E$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \langle u(x), u(y) \rangle &= \frac{\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2}{4} \\ &= \frac{\|u(x + y)\|^2 - \|u(x - y)\|^2}{4} \quad (\text{car } u \text{ est linéaire}) \\ &= \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} \quad (\text{car } u \in \mathcal{O}(E)) \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

en utilisant à nouveau la question précédente. Ainsi :

$$\boxed{\text{l'application } u \text{ préserve le produit scalaire}}$$

Exercice 3 (calcul de la somme d'une série alternée).

I – Convergence de la série

1. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(t) = \frac{\frac{1}{t} \times t - \ln(t)}{t^2} = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $t^2 > 0$ donc (en utilisant la stricte croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R}) :

$$f'(t) \geq 0 \iff 1 - \ln(t) \geq 0 \iff t \leq e$$

On en déduit les variations de f suivantes sur \mathbb{R}_+^* :

t	0	e	$+\infty$
$f(t)$		+	0
f			-
		e^{-1}	
	$-\infty$		0

La limite de f est nulle en $+\infty$ par croissances comparées. On obtient la limite de f en 0^+ par produit de limites puisque $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty$.

2. La série $\sum_{n \geq 3} u_n$ est alternée et, d'après la question précédente, la suite $(f(n))_{n \geq 3}$ est positive, décroissante et de limite 0. D'après le théorème sur les séries alternées, la série $\sum_{n \geq 3} u_n$ est convergente. Par conséquent :

la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|u_n| = \frac{\ln(n)}{n}$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad |u_n| \geq \frac{\ln(2)}{n} \geq 0$$

puisque si $n \geq 2$, on a $\ln(n) \geq \ln(2)$ (par croissance de $t \mapsto \ln(t)$ sur \mathbb{R}_+^*) et car $\frac{1}{n} \geq 0$. Or la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente donc la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(2)}{n}$ diverge (puisque $\ln(2) \neq 0$). Les séries $\sum_{n \geq 2} |u_n|$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(2)}{n}$ sont à termes positifs donc, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 2} |u_n|$ diverge.

Ainsi :

la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ n'est pas absolument convergente

II – La constante d'Euler

4. On sait que :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a (d'après la relation de Chasles) :

$$\begin{aligned} w_n - w_{n+1} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) = \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc, en utilisant les développements limités écrits à la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} w_n - w_{n+1} &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

donc on a bien :

$$w_n - w_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

6. La série de Riemann de paramètre $2 > 1$ est convergente donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^2}$ converge. Comme les séries

$\sum_{n \geq 1} (w_n - w_{n+1})$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{3}{2n^2}$ sont à termes positifs (la positivité de $w_n - w_{n+1}$ provient de l'inégalité de concavité de la fonction \ln), le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs permet de conclure que :

la série $\sum_{n \geq 1} (w_n - w_{n+1})$ est convergente

Notons $(W_n)_{n \geq 1}$ la suite des sommes partielles de cette série. On sait que la suite $(W_n)_{n \geq 1}$ converge d'après ce qui précède. De plus (la somme étant télescopique) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad W_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (w_k - w_{k+1}) = w_1 - w_n \quad \text{donc} \quad w_n = w_1 - W_{n-1}$$

La convergence de la suite $(W_n)_{n \geq 1}$ implique donc que :

la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est convergente

III – Calcul de la somme de la série

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Alors $n \geq 3 \geq e$ donc $[n, n+1] \subset [e, +\infty[$. Comme f est décroissante sur $[e, +\infty[$, elle est en particulier décroissante sur $[n, n+1]$ et on a :

$$\forall t \in [n, n+1], \quad f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens), on a :

$$\int_n^{n+1} f(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \int_n^{n+1} f(n) dt$$

Or :

$$\int_n^{n+1} f(n+1) dt = [f(n+1)t]_n^{n+1} = f(n+1)((n+1) - n) = f(n+1)$$

et, de la même façon, $\int_n^{n+1} f(n) dt = f(n)$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, \quad \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \frac{\ln(n)}{n}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(n)^2}{2} \right) \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln(n)^2}{n} - \frac{\ln(n+1)^2}{n+1} \end{aligned}$$

Comme $n \geq 3$, on sait d'après la question précédente que $\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$. Or :

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt = \left[\frac{\ln(t)^2}{2} \right]_n^{n+1} = \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln(n)^2}{2}$$

On a donc :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln(n)^2}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad v_{n+1} - v_n \leq 0$$

Ainsi :

la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est décroissante

Montrons maintenant que la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est minorée. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ et $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$. D'après la deuxième inégalité de la question 7.(a), on a :

$$\frac{\ln(k)}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$$

et donc, en sommant les inégalités :

$$\sum_{k=3}^n \frac{\ln(k)}{k} \geq \sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \quad \text{puis} \quad \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} \geq \underbrace{\frac{\ln(1)}{1}}_{=0} + \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$$

d'après la relation de Chasles pour les intégrales et en ajoutant les deux premiers termes de la somme (correspondant à $k=1$ et $k=2$). Or :

$$\int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt = \left[\frac{\ln(t)^2}{2} \right]_3^{n+1} = \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(n)^2}{2} \geq \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2} + \frac{\ln(n+1)^2 - \ln(n)^2}{2} \\ &\geq \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2} \end{aligned}$$

puisque $\ln(n+1)^2 \geq \ln(n)^2$ (par croissance de $t \mapsto \ln(t)^2$ sur \mathbb{R}_+^* et car $n+1 \geq n > 0$). Finalement, la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est minorée (par $\frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2}$). Comme on sait que cette suite est de plus décroissante, le théorème de la limite monotone permet de conclure que :

la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est convergente

8. On raisonne par récurrence.

— D'une part :

$$S_2 = \sum_{k=1}^2 u_k = u_1 + u_2 = -\frac{\ln(1)}{1} + \frac{\ln(2)}{2} = \frac{\ln(2)}{2}$$

et d'autre part :

$$2 \sum_{k=1}^1 \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^2 \frac{\ln(k)}{k} = 2 \frac{\ln(2)}{2} - \left(\frac{\ln(1)}{1} + \frac{\ln(2)}{2} \right) = \ln(2) - \frac{\ln(2)}{2} = \frac{\ln(2)}{2} = S_2$$

donc l'égalité est vraie au rang $n = 1$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que l'égalité au rang n est vraie. Par définition de $S_{2(n+1)}$ et d'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} &= S_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2} u_k = \sum_{k=1}^{2n} u_k + u_{2n+1} + u_{2n+2} \\ &= S_{2n} + (-1)^{2n+1} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + (-1)^{2n+2} \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + 2 \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \\ &= 2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} + \frac{\ln(2(n+1))}{2(n+1)} \right) - \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{\ln(k)}{k} \end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles. L'égalité est donc vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$v_n - v_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(n)^2}{2} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} + \frac{\ln(2n)^2}{2}$$

et :

$$\ln(2n)^2 = (\ln(2) + \ln(n))^2 = \ln(2)^2 + 2 \ln(2) \ln(n) + \ln(n)^2$$

donc :

$$v_n - v_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} + \frac{\ln(2)^2}{2} + \ln(2) \ln(n) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{\ln(2)^2}{2} - \ln(2) \ln(n) &= \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2)}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2) + \ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \quad (\text{linéarité de la somme}) \\
 &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}
 \end{aligned}$$

La question précédente permet donc de conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n} = \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{\ln(2)^2}{2} - \ln(2) \ln(n)}$$

10. On sait que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ converge d'après la question 2. et on a (puisque $(S_n)_{n \geq 1}$ est la suite de ses sommes partielles) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}$$

Déterminons cette dernière limite en utilisant la question 9. Par définition de la suite $(w_n)_{n \geq 1}$, on a :

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n} &= \ln(2) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) + v_n - v_{2n} - \frac{\ln(2)^2}{2} \\
 &= \ln(2) w_n + v_n - v_{2n} - \frac{\ln(2)^2}{2} \quad (*)
 \end{aligned}$$

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \gamma$ (d'après la question 6.) et que la suite $(v_m)_{m \geq 1}$ converge. En notant ℓ sa limite, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - v_{2n}) = \ell - \ell = 0$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (*), il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \gamma \ln(2) - \frac{\ln(2)^2}{2}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{\ln(2)^2}{2}}$$