

DEVOIR SURVEILLÉ 10

un corrigé

Exercice 1 (étude d'une famille de séries).

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

★ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n(n+1) \cdots (n+p) \geq n(n+1) \geq n^2 > 0$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u(n, p) \leq \frac{1}{n^2}$$

★ On sait que la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (car $2 > 1$).

★ Les séries $\sum_{n \geq 1} u(n, p)$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs.

Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs permet de conclure que la série $\sum_{n \geq 1} u(n, p)$ est convergente.

Ainsi :

pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n \geq 1} u(n, p)$ est convergente

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \quad (\text{somme télescopique})$$

Ainsi :

$$\sigma(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

(b) On a :

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{(X+1)(X+2) - 2X(X+2) + X(X+1)}{X(X+1)(X+2)} \times \frac{1}{2}$$

i.e. :

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1}{2X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} \quad (\text{sommations télescopiques}) \end{aligned}$$

donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

On en déduit que :

$$\sigma(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$$

3. Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u(n, p-1) - u(n+1, p-1) &= \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+p-1)} - \frac{1}{(n+1) \cdots (n+p-1)(n+p)} \\ &= \frac{(n+p) - n}{n(n+1) \cdots (n+p-1)(n+p)} \\ &= p \times \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+p)} \\ &= pu(n, p) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u(n, p-1) - u(n+1, p-1) = pu(n, p)}$$

4. Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On a :

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} pu(n, p)}_{=p\sigma(p)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} (u(n, p-1) - u(n+1, p-1)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (u(k, p-1) - u(k+1, p-1)) \end{aligned}$$

Or (la somme est télescopique) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (u(k, p-1) - u(k+1, p-1)) &= u(1, p-1) - u(n+1, p-1) \\ &= \frac{1}{1 \times 2 \times \cdots \times p} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+p)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p!} \end{aligned}$$

On en déduit que $p\sigma(p) = \frac{1}{p!}$, i.e. :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \sigma(p) = \frac{1}{p \times p!}}$$

Exercice 2 (calcul d'une distance).

1. On suppose que $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts. Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

★ Soient $P, Q, R \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \langle P + \lambda Q, R \rangle &= \sum_{k=0}^n (P + \lambda Q)(a_k) R(a_k) \\ &= \sum_{k=0}^n (P(a_k) + \lambda Q(a_k)) R(a_k) \\ &= \sum_{k=0}^n P(a_k) R(a_k) + \lambda \sum_{k=0}^n Q(a_k) R(a_k) \quad (\text{linéarité de la somme}) \\ &= \langle P, R \rangle + \lambda \langle Q, R \rangle \end{aligned}$$

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc linéaire par rapport à la première variable.

★ Pour tous $P, Q \in E$, on a :

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k) Q(a_k) = \sum_{k=0}^n Q(a_k) P(a_k) = \langle Q, P \rangle$$

Ainsi, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique. Comme elle est de plus linéaire par rapport à la première variable, cette application est bilinéaire.

★ Soit $P \in E$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $P(a_k)^2 \geq 0$ (car $P(a_k) \in \mathbb{R}$) donc :

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)^2 \geq 0$$

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc positive.

★ Soit $P \in E$. On suppose que $\langle P, P \rangle = 0$. Une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous les sommants sont nuls donc :

$$(\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_k)^2 = 0) \quad i.e. \quad (\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_k) = 0)$$

Ainsi, $a_0, \dots, a_n$ sont des racines de P . Comme ces nombres sont deux à deux distincts par hypothèse, le polynôme P admet au moins $n+1$ racines distinctes. Or $\deg(P) \leq 0$ donc P est le polynôme nul. Ainsi, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie.

Supposons maintenant que les nombres $a_0, \dots, a_n$ ne soient pas deux à deux distincts. Il existe donc $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $i < j$ et $a_i = a_j$. Le polynôme $P = \prod_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{j\}} (X - a_k)$ appartient à E (on a $\deg(P) = n$) et :

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)^2 = \sum_{k=0}^n 0^2 = 0$$

et P n'est pas le polynôme nul. Ainsi, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ n'est pas définie et n'est donc pas un produit scalaire sur E . Finalement :

l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E si et seulement si $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts

2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ s'écrit comme suit :

$$\forall P, Q \in E, \quad \left| \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k) \right| \leq \left(\sum_{k=0}^n P(a_k)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^n Q(a_k)^2 \right)^{1/2}$$

3. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $P_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (X - a_k) \in E$ (les racines de P_i sont les nombres a_k pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}$) donc, pour tous $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$, on a :

$$\begin{aligned} \langle P_i, P_j \rangle &= \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin \{i, j\}}}^n P_i(a_k)P_j(a_k) \right) + P_i(a_i)P_j(a_i) + P_i(a_j)P_j(a_j) \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin \{i, j\}}}^n 0 \times 0 + P_i(a_i) \times 0 + 0 \times P_j(a_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $P_i \perp P_j$. La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est donc une base orthogonale de E (car de plus cette famille comporte $n+1 = \dim(E)$ vecteurs non nuls). De plus, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\|P_i\| = \sqrt{\langle P_i, P_i \rangle} = \left(\sum_{k=0}^n P_i(a_k)^2 \right)^{1/2} = |P_i(a_i)| = \left| \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (a_i - a_k) \right|$$

Ainsi :

une base orthonormale de E est la famille des polynômes de Lagrange associés aux scalaires $a_0, \dots, a_n$

4. (a) Soit $P \in E$. On a :

$$P \in H \iff \sum_{k=0}^n P(a_k) \times 1 = 0 \iff \langle P, 1 \rangle = 0 \iff P \in \text{Vect}(1)^\perp$$

On en déduit que $H = \text{Vect}(1)^\perp$ est l'orthogonal dans E de la droite vectorielle engendrée par le polynôme $X^0 = 1$. Ainsi :

H est un hyperplan de E dont un vecteur normal est le polynôme 1

(b) Soit $Q \in E$. Comme H est un hyperplan de E dont un vecteur normal est 1, on sait que :

$$d(Q, H) = \frac{|\langle Q, 1 \rangle|}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{k=0}^n Q(a_k) \right|$$

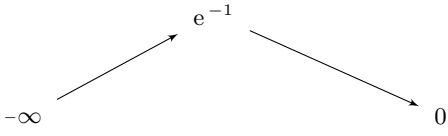
Exercice 3 (développement asymptotique d'une suite).

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 1 - \ln(x) > 0 && \text{car } x^2 > 0 \\ &\iff \ln(x) < 1 \\ &\iff x < e && \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc :		
x	0	e $+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -
$f(x)$		e^{-1} 

En effet, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées.

(b) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 4.

★ La fonction f est continue sur les segments $[k-1, k]$ et $[k, k+1]$ (comme quotient de fonctions continues) donc elle est intégrable sur ces segments et les intégrales $\int_{k-1}^k \frac{\ln(k)}{k} dx$ et $\int_k^{k+1} \frac{\ln(k)}{k} dx$ sont bien définies.

★ Par ailleurs, $k-1 \geq 3 > e$ et donc les intervalles $[k-1, k]$ et $[k, k+1]$ sont inclus dans l'intervalle $[e, +\infty[$. Comme la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[e, +\infty[$ (d'après la question 1. (a)), elle l'est aussi sur les intervalles $[k-1, k]$ et $[k, k+1]$. On en déduit alors que :

- pour tout $x \in [k, k+1]$, on a l'inégalité $\frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{\ln(k)}{k}$ et donc, par croissance de l'intégrale (avec les bornes dans le bon sens) :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(k)}{k} dx$$

et comme par linéarité :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(k)}{k} dx = \frac{\ln(k)}{k} \int_k^{k+1} 1 dx = \frac{\ln(k)}{k}$$

on a la première inégalité annoncée, c'est-à-dire $\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k}$.

- pour tout $x \in [k-1, k]$, on a l'inégalité $\frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(x)}{x}$ et par croissance de l'intégrale (avec les bornes dans le bon sens), il vient par linéarité :

$$\int_{k-1}^k \frac{\ln(k)}{k} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx$$

ce qui fournit la deuxième inégalité, à savoir $\frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx$.

Finalement,

$$\forall k \geq 4, \quad \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx$$

(c) Soit n un entier supérieur ou égal à 4. En sommant les inégalités obtenues à la question 1.(b) sur les entiers $k \in \llbracket 4, n \rrbracket$, on obtient

$$\sum_{k=4}^n \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \sum_{k=4}^n \frac{\ln(k)}{k} \leq \sum_{k=4}^n \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx$$

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq S_n - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(3)}{3} \leq \int_3^n \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Or une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ est la fonction $x \mapsto \frac{\ln^2(x)}{2}$ donc

$$\left[\frac{\ln^2(x)}{2} \right]_4^{n+1} \leq S_n - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(3)}{3} \leq \left[\frac{\ln^2(x)}{2} \right]_3^n$$

c'est-à-dire

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(4)}{2} \leq S_n - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(3)}{3} \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2}$$

Finalement,

$$\text{en posant } A = \frac{\ln^2(4)}{2}, B = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3} \text{ et } C = \frac{\ln^2(3)}{2} \text{ on a pour tout } n \geq 4,$$

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C$$

(d) D'après la question 1.(c), on sait que :

$$\forall n \geq 4, \quad S_n \geq \frac{\ln^2(n+1)}{2} + B - A$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln^2(n+1)}{2} + B - A \right) = +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ diverge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Alors $\ln(n) \neq 0$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} &= \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \right)^2 = \left(\frac{\ln(n[1 + \frac{1}{n}])}{\ln(n)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n)} \right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n)} \right)^2 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{X \rightarrow 0} \ln(1 + X) = 0$ tandis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$, on trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} = 1$ et donc :

$$\boxed{\ln^2(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln^2(n)}$$

(b) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on sait d'après la question 1.(c) que :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} + B - A \leq S_n \leq \frac{\ln^2(n)}{2} + B - C$$

et donc, en divisant par $\frac{\ln^2(n)}{2} > 0$,

$$\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} + \frac{2(B-A)}{\ln^2(n)} \leq \frac{2S_n}{\ln^2(n)} \leq 1 + \frac{2(B-C)}{\ln^2(n)}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln^2(n) = +\infty$ et $\ln^2(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln^2(n)$ (question 2.(a)), on trouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} + \frac{2(B-A)}{\ln^2(n)} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2(B-C)}{\ln^2(n)} \right) = 1$$

D'après le théorème des gendarmes, la suite $\left(\frac{2S_n}{\ln^2(n)} \right)_{n \geq 4}$ est convergente de limite 1, ce qui se réécrit :

$$\boxed{S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}}$$

3. (a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} - S_n + \frac{\ln^2(n)}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \left(\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} \right) \end{aligned}$$

On sait que $t \mapsto \frac{\ln^2(t)}{2}$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ donc :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$$

Comme $n \geq 3$, on a $n+1 \geq 4$ et donc, d'après la question 1.(b),

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt = \int_{(n+1)-1}^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \geq \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq 0$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \geq 3, \quad u_{n+1} - u_n \leq 0}$$

- (b) D'après la question 3.(a), la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante. De plus, d'après la question 1.(c), on sait que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a :

$$S_n \geq \frac{\ln^2(n+1)}{2} + B - A \geq \frac{\ln^2(n)}{2} + B - A$$

car la fonction $t \mapsto \frac{\ln^2(t)}{2}$ est croissante sur $[1, +\infty[$ et car $1 \leq n \leq n+1$ (on a $n \geq 4$), ce qui nous donne la minoration :

$$u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2} \geq B - A$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est minorée (par $\min(u_3, B - A)$). D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est convergente. Comme la convergence d'une suite ne dépend pas de ses premiers termes, on peut conclure finalement que :

la suite u est convergente

4. (a) On utilise un raisonnement par récurrence simple. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la proposition

$$\mathcal{P}_n : \ll A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \gg$$

★ **Initialisation** : montrons que la proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie. D'une part :

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 - \ln(2) \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} &= \frac{\ln(2)}{2} + \underbrace{\frac{\ln(1)}{1}}_{=0} - \underbrace{\frac{\ln(1)}{1}}_{=0} - \ln(2) \\ &= -\frac{\ln(2)}{2} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$A_2 = (-1)^0 \frac{\ln(1)}{1} + (-1)^1 \frac{\ln(2)}{2} = -\frac{\ln(2)}{2}$$

et donc $S_2 - S_1 - \ln(2) \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = A_2$, ce qui prouve que la proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie.

★ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$ (fixé). On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$. La quantité

$$S_{2(n+1)} - S_{n+1} - \ln(2) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

notée $\mathcal{Q}$, est égale à :

$$S_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - S_n - \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{\ln(2)}{n+1}$$

d'après la relation de Chasles (pour les sommes). En utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + \frac{\ln(2) + \ln(n+1)}{2(n+1)} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(2)}{n+1} \\ &= A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} - \left(\frac{\ln(n+1)}{2(n+1)} + \frac{\ln(2)}{2(n+1)} \right) \\ &= A_{2n} + (-1)^{2n} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + (-1)^{2n+1} \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \\ &= A_{2(n+1)} \end{aligned}$$

et donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

★ **Conclusion** : pour tout entier naturel n non nul, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence simple.

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

- (b) En utilisant le développement asymptotique proposé dans l'égalité obtenue à la question 4.(a), il vient

$$A_{2n} \underset{+\infty}{=} S_{2n} - S_n - \ln(2) \ln(n) - \gamma \ln(2) + o(1)$$

On sait d'après la question 3.(b) que la suite u converge de limite notée ℓ donc on a l'égalité

$$u_n \underset{+\infty}{=} \ell + o(1) \quad \text{ce qui se réécrit} \quad S_n \underset{+\infty}{=} \frac{\ln^2(n)}{2} + \ell + o(1)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &\underset{+\infty}{=} \left(\frac{\ln^2(2n)}{2} + \gamma + o(1) \right) - \left(\frac{\ln^2(n)}{2} + \gamma + o(1) \right) \\ &\underset{+\infty}{=} \frac{\ln^2(2n)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} + o(1) \end{aligned}$$

puis, en utilisant les propriétés du logarithme,

$$\begin{aligned} A_{2n} &\underset{+\infty}{=} \frac{\ln^2(2) + 2\ln(2)\ln(n) + \ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ln(2)\ln(n) - \gamma\ln(2) + o(1) \\ &\underset{+\infty}{=} \frac{\ln^2(2)}{2} - \gamma\ln(2) + o(1) \end{aligned}$$

Donc :

la suite $(A_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\frac{\ln^2(2)}{2} - \gamma\ln(2)$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par linéarité :

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \\ &= A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \end{aligned}$$

On sait que la suite $(A_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\frac{\ln^2(2)}{2} - \gamma\ln(2)$ (question 4.(b)) tandis que la suite $\left(\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge de limite 0 par croissances comparées. D'après les opérations sur les limites, on peut en déduire que

la suite $(A_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\frac{\ln^2(2)}{2} - \gamma\ln(2)$

(d) La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est telle que ses deux suites extraites $(A_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(A_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes de même limite $\frac{\ln^2(2)}{2} - \gamma\ln(2)$. Par conséquent,

la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\frac{\ln^2(2)}{2} - \gamma\ln(2)$; autrement dit, la série

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k} \text{ converge de somme } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln^2(2)}{2} - \gamma\ln(2)$$

Exercice 4 (endomorphismes préservant le produit scalaire).

1. (a) Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi_u(\lambda x + y) &= 2 \frac{\langle \lambda x + y \mid u \rangle}{\langle u \mid u \rangle} u - (\lambda x + y) = 2 \frac{\lambda \langle x \mid u \rangle + \langle y \mid u \rangle}{\langle u \mid u \rangle} u - \lambda x - y \\ &= 2 \frac{\lambda \langle x \mid u \rangle}{\langle u \mid u \rangle} u + 2 \frac{\langle y \mid u \rangle}{\langle u \mid u \rangle} u - \lambda x - y \\ &= \lambda \varphi_u(x) + \varphi_u(y) \end{aligned}$$

Donc :

φ_u est bien un endomorphisme de E

(b) On remarque déjà que $\varphi_u(u) = u$. De plus, pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} (\varphi_u \circ \varphi_u)(x) &= \varphi_u \left(2 \frac{\langle x \mid u \rangle}{\langle u \mid u \rangle} u - x \right) \\ &= 2 \frac{\langle x \mid u \rangle}{\langle u \mid u \rangle} \varphi_u(u) - \varphi_u(x) \quad (\text{car } \varphi_u \in \mathcal{L}(E)) \\ &= 2 \frac{\langle x \mid u \rangle}{\langle u \mid u \rangle} u - 2 \frac{\langle x \mid u \rangle}{\langle u \mid u \rangle} u + x \\ &= x \end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi_u \circ \varphi_u = \text{id}_E$. Donc :

$$\varphi_u \text{ est un automorphisme de } E \text{ et } \varphi_u^{-1} = \varphi_u$$

(c) Pour tout $x \in E$, on a (en utilisant la bilinéarité et la symétrie d'un produit scalaire) :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_u(x) | \varphi_u(x) \rangle &= \left\langle 2 \frac{\langle x | u \rangle}{\langle u | u \rangle} u - x \mid 2 \frac{\langle x | u \rangle}{\langle u | u \rangle} u - x \right\rangle \\ &= 4 \frac{\langle x | u \rangle^2}{\langle u | u \rangle^2} \langle u | u \rangle - 4 \frac{\langle x | u \rangle^2}{\langle u | u \rangle} + \langle x | x \rangle \end{aligned}$$

donc :

$$\forall x \in E, \quad \langle \varphi_u(x), \varphi_u(x) \rangle = \langle x, x \rangle$$

(d) Soient $x, y \in E$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\langle \varphi_u(x) | \varphi_u(y) \rangle = 4 \underbrace{\frac{\langle x | u \rangle \langle y | u \rangle}{\langle u | u \rangle^2} \langle u | u \rangle - 2 \frac{\langle x | u \rangle}{\langle u | u \rangle} \langle u | y \rangle - 2 \frac{\langle y | u \rangle}{\langle u | u \rangle} \langle x | u \rangle + \langle x | y \rangle}_{=0}$$

donc :

$$\text{l'application } \varphi_u \text{ conserve le produit scalaire}$$

(e) Comme $D_u = \text{Vect}(u)$. On a :

$$\varphi_u(D_u) = \text{Vect}(\varphi_u(u)) = \text{Vect}(u) = D_u$$

Soit $x \in H_u$. Alors $x \perp u$ donc $\langle x | u \rangle = 0$. On en déduit que $\varphi_u(x) = -x \in H_u$ (comme $x \in H_u$, on a $-x \in H_u$ car H_u est un sous-espace vectoriel de E). Ainsi :

$$H_u \text{ est stable par } \varphi_u$$

2. (a) Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On remarque que $H = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \langle X | u \rangle = 0\} = D_u^\perp$. Autrement dit :

$$H^\perp = D_u \text{ est de dimension 1 et } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}u\right) \text{ en est une base orthonormale}$$

(b) Soit p' la projection orthogonale sur $H^\perp$ et notons e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $p'(x) = \left\langle x \mid \frac{u}{\sqrt{3}} \right\rangle \frac{u}{\sqrt{3}}$. En particulier, $p'(e_1) = \frac{1}{3}u = p'(e_2) = p'(e_3)$. Ainsi, la matrice de p' dans la base canonique est :

$$M' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis, la matrice M de la projection orthogonale p sur H dans la base canonique est :

$$M = I_3 - M' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Prenons $v = \frac{1}{\sqrt{3}}u$. Comme φ_v est la symétrie orthogonale par rapport à $D_v = H^\perp$, on a $\varphi_v = \text{id}_E - 2p$. La matrice de φ_v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donc :

$$-I_3 + 2M' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$