Devoir Surveillé 1

un corrigé

Exercice 1 (cours).

1. (a) La fonction f est paire sur I si I est symétrique par rapport à 0 (*i.e.* : $\forall x \in I,\ -x \in I$) et si :

$$\forall x \in I, \qquad f(-x) = f(x)$$

(b) La fonction f est strictement croissante sur I si :

$$\forall x, y \in I, \qquad x < y \implies f(x) < f(y)$$

(c) La fonction f est minorée sur I si :

$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \geqslant M$$

(d) La fonction f admet un maximum en a sur I si :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \leqslant f(a)$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = \left(\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 &= \frac{\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)^2}{4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x} - \left(\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}\right)}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

3. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \geqslant 0$$

Donc ch est minorée (par 0) sur $\mathbb{R}$. Par contre, $\mathrm{ch}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ donc ch n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$. En particulier, ch n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (étude d'une fonction).

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$x \in \mathscr{D}_f \iff \left\{\begin{array}{l} 2x - 4 \neq 0 \\ \dfrac{-x+3}{2x-4} \geqslant 0 \end{array}\right. \iff x \in]-\infty, -3] \cup]2, +\infty[$$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+3}{2x-4}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

On conclut donc bien que :

$$\boxed{\mathscr{D}_f =]-\infty, -3] \cup]2, +\infty[}$$

2. Comme la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur }]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[\text{ (ensemble noté } D)}$$

et :

$$\boxed{\forall x \in D, \qquad f'(x) = \frac{\frac{2x-4-2(x+3)}{(2x-4)^2}}{2\sqrt{\frac{x+3}{2x-4}}} = -\frac{5}{(2x-4)^2}\sqrt{\frac{2x-4}{x+3}}}$$

3. Pour tout $x \in D$, on a $f'(x) < 0$ car $-\dfrac{5}{(2x-4)^2} < 0$ et $\sqrt{\dfrac{2x-4}{x+3}} > 0$. Ainsi, f est (strictement) décroissante sur les intervalles $]-\infty, -3]$ et $]2, +\infty[$.

Comme $\dfrac{x+3}{2x-4} \xrightarrow[x \to -3^-]{} 0$, on a :

$$\boxed{\lim_{x \to -3^-} f(x) = 0}$$

De plus :

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{1+\frac{3}{x}}{2-\frac{4}{x}}} = \sqrt{\frac{1}{2}}}$$

Enfin, $2x-4 \xrightarrow[x \to 2^+]{} 0^+$ et $x+3 \xrightarrow[x \to 2^+]{} 5$ donc $\dfrac{x+3}{2x-4} \xrightarrow[x \to 2^+]{} +\infty$. Or $\sqrt{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ donc :

$$\boxed{\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty}$$

x	0		-3		2		$+\infty$
f	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0		$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 3 (croissances comparées).

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall t > 0, \qquad f'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$$

Ainsi, le signe de $f'(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est celui de $t-1$. On en déduit le tableau de variations de f suivant :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

(b) La fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question précédente donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad t - \ln(t) \geqslant 0 \qquad i.e. \qquad \ln(t) \leqslant t}$$

(c) Soit $x \in [1, +\infty[$. D'après $(*)$, on a :

$$\ln(\sqrt{x}) \leqslant \sqrt{x} \qquad \text{i.e.} \qquad \frac{\ln(x)}{2} \leqslant \sqrt{x} \qquad \text{puis} \qquad \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

en multipliant par $\frac{2}{x} \geqslant 0$. De plus, comme $x \geqslant 1$, on a $\ln(x) \geqslant 0$. Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[, \qquad 0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}}$$

(d) Comme $\frac{2}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, le théorème des gendarmes et les inégalités précédemment obtenues nous donnent :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0}$$

2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on sait que $x = \mathrm{e}^{\ln(x)}$ donc :

$$\boxed{x\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{\ln(x)-x} = \mathrm{e}^{x\left(\frac{\ln(x)}{x}-1\right)}}$$

(b) D'après la question 1.(d), on a $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et donc $x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$. Or $\mathrm{e}^t \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$ donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0}$$

Problème (extrait de Bac 1998)

Partie A : étude d'une fonction *f*

1. On a $2 - x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ et $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc, par produit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 2\,\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x - k$. Or $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ et $x\,\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ par croissances comparées donc :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -k}$$

2. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -\,\mathrm{e}^x + (2-x)\,\mathrm{e}^x = (1-x)\,\mathrm{e}^x$$

donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$ (puisque $\mathrm{e}^x > 0$).

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-k$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$-\infty$

(b) D'après l'hypothèse faite sur k (à savoir $0 < k < \mathrm{e}$) :

$$\boxed{f(1) = \mathrm{e} - k > 0}$$

3. (a) La fonction f est strictement croissante et continue sur l'intervalle $]-\infty, 1[$. De plus, $f(1) > 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -k < 0$. D'après le théorème de la bijection :

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha_k \text{ dans l'intervalle }]-\infty, 1[}$$

On procède de la même manière sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

(b) Le sens de variations de f obtenu à la question 2.(a) nous permet d'obtenir le signe de f suivant sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α_k		β_k		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. L'égalité $f(\alpha_k) = 0$ se réécrit $(2 - \alpha_k)\,\mathrm{e}^{\alpha_k} - k = 0$ soit encore $2\,\mathrm{e}^{\alpha_k} - \alpha_k\,\mathrm{e}^{\alpha_k} - k = 0$. Ainsi, on a l'égalité $\alpha_k\,\mathrm{e}^{\alpha_k} = 2\,\mathrm{e}^{\alpha_k} - k$. Donc :

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1) = \alpha_k\,\mathrm{e}^{\alpha_k} - \mathrm{e}^{\alpha_k} - k\alpha_k + k &= 2\,\mathrm{e}^{\alpha_k} - k - \mathrm{e}^{\alpha_k} - k\alpha_k + k \\ &= \mathrm{e}^{\alpha_k} - k\alpha_k\end{aligned}$$

On a bien montré que :

$$\boxed{\mathrm{e}^{\alpha_k} - k\alpha_k = (\mathrm{e}^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)}$$

Partie B : étude d'une fonction g_k

5. (a) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) = \mathrm{e}^{x} - k$ donc :

$$u'(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{x} \geqslant k \iff x \geqslant \ln(k)$$

par stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit le signe de u' et le sens de variations de u sur $\mathbb{R}$ suivants[1] :

x	$-\infty$		$\ln(k)$		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
u	$+\infty$	$\searrow$	$u(\ln(k))$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) La fonction u est minorée sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(\ln(k)) = \mathrm{e}^{\ln(k)} - k\ln(k) = k - k\ln(k) = k(1 - \ln(k))$$

Or $0 < k < \mathrm{e}$ donc $\ln(k) < \ln(\mathrm{e}) = 1$ (par croissance stricte de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$). On en déduit que $k(1 - \ln(k)) > 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad u(x) = \mathrm{e}^{x} - kx > 0}$$

6. (a) On a $\mathrm{e}^{x} - k \xrightarrow[x \to -\infty]{} -k$ et $\mathrm{e}^{x} - kx \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ car $-k < 0$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} g_k(x) = 0}$$

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_k(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}(1 - k\,\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^{x}(1 - kx\,\mathrm{e}^{-x})} = \frac{1 - k\,\mathrm{e}^{-x}}{1 - kx\,\mathrm{e}^{-x}}$$

Or $\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $x\,\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ (croissances comparées) donc :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g_k(x) = 1}$$

(b) La fonction g_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_k'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - kx) - (\mathrm{e}^{x} - k)^2}{(\mathrm{e}^{x} - kx)^2} &= \frac{\mathrm{e}^{2x} - kx\,\mathrm{e}^{x} - (\mathrm{e}^{2x} - 2k\,\mathrm{e}^{x} + k^2)}{(\mathrm{e}^{x} - kx)^2} \\ &= \frac{2k\,\mathrm{e}^{x} - kx\,\mathrm{e}^{x} - k^2}{(\mathrm{e}^{x} - kx)^2} \\ &= k \times \frac{(2 - x)\,\mathrm{e}^{x} - k}{(\mathrm{e}^{x} - kx)^2}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_k'(x) = \frac{kf(x)}{(\mathrm{e}^{x} - kx)^2}}$$

1. Pour obtenir la limite de u en $+\infty$, il suffit de factoriser par e^{x} puis d'utiliser les croissances comparées.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{k}{(\mathrm{e}^x - kx)^2} > 0$ donc le signe de g_k' sur $\mathbb{R}$ est celui de la fonction f.

x	$-\infty$		α_k		β_k		$+\infty$
$g_k'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g_k	0	$\searrow$	$g_k(\alpha_k)$	$\nearrow$	$g_k(\beta_k)$	$\searrow$	1

En outre, on a $\boxed{g_k(1) = 1}$.

7. (a) D'après la question 4., on a :

$$\boxed{g_k(\alpha_k) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha_k} - k}{\mathrm{e}^{\alpha_k} - k\alpha_k} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha_k} - k}{(\mathrm{e}^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)} = \frac{1}{\alpha_k - 1}}$$

(b) Les points M_k et N_k ont pour coordonnées respectives $\left(\alpha_k, \dfrac{1}{\alpha_k - 1}\right)$ et $\left(\beta_k, \dfrac{1}{\beta_k - 1}\right)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in]0, \mathrm{e}[\text{, les points } M_k \text{ et } N_k \text{ sont sur la courbe d'équation } y = \frac{1}{x-1}}$$

8. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g_2(x) - g_1(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x - 2x} - \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x} &= \frac{(\mathrm{e}^x - 2)(\mathrm{e}^x - x) - (\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - 2x)}{(\mathrm{e}^x - 2x)(\mathrm{e}^x - x)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x} - x\,\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x + 2x - (\mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 2x)}{(\mathrm{e}^x - 2x)(\mathrm{e}^x - x)} \\ &= \frac{x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 2x)(\mathrm{e}^x - x)} \\ &= \frac{(x-1)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 2x)(\mathrm{e}^x - x)} \end{aligned}$$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^x - 2x > 0$ et $\mathrm{e}^x - x > 0$ (d'après la question 5.(b) avec $k \in \{1, 2\}$). Le signe de $g_2(x) - g_1(x)$ est donc celui de $x - 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g_2(x) - g_1(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi :

$$\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C}_1 \text{ est au-dessus de } \mathscr{C}_2 \text{ sur }]-\infty, 1]\text{, et en-dessous sur } [1, +\infty[}$$

(b) On a (pour $k = 2$) :

$$f(0) = (2 - 0)\,\mathrm{e}^0 - 2 = 2 - 2 = 0$$

Donc 0 est une solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $]-\infty, 1[$. Or cette équation admet une unique solution dans cet intervalle (d'après la question 3.(a)), notée α_2. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\alpha_2 = 0}$$

(c) **Graphes de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{H}$**