

DEVOIR SURVEILLÉ 1

un corrigé

Exercice 1 (cours).

1. (a) La fonction f est paire sur I si I est symétrique par rapport à 0 (i.e. : $\forall x \in I, -x \in I$) et si :

$$\forall x \in I, \quad f(-x) = f(x)$$

- (b) La fonction f est strictement croissante sur I si :

$$\forall x, y \in I, \quad x < y \implies f(x) < f(y)$$

- (c) La fonction f est minorée sur I si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq M$$

- (d) La fonction f admet un maximum en a sur I si :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(a)$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 0$$

Donc ch est minorée (par 0) sur $\mathbb{R}$. Par contre, $\operatorname{ch}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc ch n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$. En particulier, ch n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (une récurrence).

On utilise une récurrence double pour démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + 2^n$$

- ★ On sait que $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$. De plus :

$$1 + 2^0 = 2 = u_0 \quad \text{et} \quad 1 + 2^1 = 3 = u_1$$

donc les égalités sont vraies aux rang $n = 0$ et $n = 1$.

- ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$u_n = 1 + 2^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 1 + 2^{n+1}$$

Montrons que $u_{n+2} = 1 + 2^{n+2}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n && \text{(par définition de la suite)} \\ &= 3(1 + 2^{n+1}) - 2(1 + 2^n) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= 3 + 3 \times 2^{n+1} - 2 - 2 \times 2^n \\ &= 1 + 3 \times 2^{n+1} - 2^{n+1} \\ &= 1 + 2 \times 2^{n+1} \\ &= 1 + 2^{n+2} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n + 2$.

Par principe de récurrence double, on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + 2^n$$

Exercice 3 (étude d'une fonction).

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \begin{cases} 2x-4 \neq 0 \\ \frac{-x+3}{2x-4} \geq 0 \end{cases} \iff x \in]-\infty, -3] \cup]2, +\infty[$$

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$2x-4$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+3}{2x-4}$	$+$	0	$-$	$+$

On conclut donc que :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty, -3] \cup]2, +\infty[$$

2. Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur }]-\infty, -3] \cup]2, +\infty[\text{ (ensemble noté } D)$$

et :

$$\forall x \in D, \quad f'(x) = \frac{\frac{2x-4-2(x+3)}{(2x-4)^2}}{2\sqrt{\frac{x+3}{2x-4}}} = -\frac{5}{(2x-4)^2} \sqrt{\frac{2x-4}{x+3}}$$

3. Pour tout $x \in D$, on a $f'(x) < 0$ car $-\frac{5}{(2x-4)^2} < 0$ et $\sqrt{\frac{2x-4}{x+3}} > 0$. Ainsi, f est (strictement) décroissante sur les intervalles $]-\infty, -3]$ et $]2, +\infty[$.

Comme $\frac{x+3}{2x-4} \xrightarrow{x \rightarrow -3^-} 0$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 0$$

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x(1+\frac{3}{x})}{x(2-\frac{4}{x})}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{1+\frac{3}{x}}{2-\frac{4}{x}}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Enfin, $2x-4 \xrightarrow{x \rightarrow 2^+} 0^+$ et $x+3 \xrightarrow{x \rightarrow 2^+} 5$ donc $\frac{x+3}{2x-4} \xrightarrow{x \rightarrow 2^+} +\infty$. Or $\sqrt{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

x	0	-3	2	$+\infty$
f	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$+\infty$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 4 (croissances comparées).

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall t > 0, \quad f'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$$

Ainsi, le signe de $f'(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est celui de $t-1$. On en déduit le tableau de variations de f suivant :

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
f	$+\infty$	1	

(b) La fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question précédente donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad t - \ln(t) \geq 1 \geq 0 \quad \text{donc} \quad \ln(t) \leq t$$

(c) Soit $x \in [1, +\infty[$. D'après (*), on a :

$$\ln(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x} \quad i.e. \quad \frac{\ln(x)}{2} \leq \sqrt{x} \quad \text{puis} \quad \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

en multipliant par $\frac{2}{x} \geq 0$. De plus, comme $x \geq 1$, on a $\ln(x) \geq 0$. Ainsi, on a bien :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

(d) Comme $\frac{2}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, le théorème des gendarmes et les inégalités précédemment obtenues nous donnent :

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on sait que $x = e^{\ln(x)}$ donc :

$$x e^{-x} = e^{\ln(x)-x} = e^{x\left(\frac{\ln(x)}{x}-1\right)}$$

D'après la question 1.(d), on a $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et donc $x \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$. Or $e^t \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ donc :

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

Problème (extrait de Bac 1998)

Partie A : étude d'une fonction f

1. On a $2 - x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ et $e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 2e^x - xe^x - k$. Or $e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ et $xe^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ par croissances comparées donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k$$

2. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$$

donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$ (puisque $e^x > 0$).

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-k$	$f(1)$	$-\infty$

(b) D'après l'hypothèse faite sur k (à savoir $0 < k < e$) :

$$f(1) = e - k > 0$$

3. (a) La fonction f est strictement croissante et continue sur l'intervalle $]-\infty, 1[$. De plus, $f(1) > 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k < 0$. D'après le théorème de la bijection :

$$\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha_k \text{ dans l'intervalle }]-\infty, 1[$$

On procède de la même manière sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

(b) Le sens de variations de f obtenu à la question 2.(a) nous permet d'obtenir le signe de f suivant sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α_k	β_k	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$-$

4. L'égalité $f(\alpha_k) = 0$ se réécrit $(2 - \alpha_k)e^{\alpha_k} - k = 0$ soit encore $2e^{\alpha_k} - \alpha_k e^{\alpha_k} - k = 0$. Ainsi, on a l'égalité $\alpha_k e^{\alpha_k} = 2e^{\alpha_k} - k$. Donc :

$$\begin{aligned} (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1) &= \alpha_k e^{\alpha_k} - e^{\alpha_k} - k\alpha_k + k = 2e^{\alpha_k} - k - e^{\alpha_k} - k\alpha_k + k \\ &= e^{\alpha_k} - k\alpha_k \end{aligned}$$

On a bien montré que :

$$e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$$

Partie B : étude d'une fonction g_k

5. (a) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) = e^x - k$ donc :

$$u'(x) \geq 0 \iff e^x \geq k \iff x \geq \ln(k)$$

par stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit le signe de u' et le sens de variations de u sur $\mathbb{R}$ suivants¹ :

x	$-\infty$	$\ln(k)$	$+\infty$
$u'(x)$	$-$	0	$+$
u	$+\infty$	$u(\ln(k))$	$+\infty$

(b) La fonction u est minorée sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(\ln(k)) = e^{\ln(k)} - k \ln(k) = k - k \ln(k) = k(1 - \ln(k))$$

Or $0 < k < e$ donc $\ln(k) < \ln(e) = 1$ (par croissance stricte de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$). On en déduit que $k(1 - \ln(k)) > 0$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = e^x - kx > 0$$

6. (a) On a $e^x - k \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -k$ et $e^x - kx \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ car $-k < 0$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g_k(x) = 0$$

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \frac{e^x(1 - k e^{-x})}{e^x(1 - k x e^{-x})} = \frac{1 - k e^{-x}}{1 - k x e^{-x}}$$

Or $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $x e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (croissances comparées) donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_k(x) = 1$$

1. Pour obtenir la limite de u en $+\infty$, il suffit de factoriser par e^x puis d'utiliser les croissances comparées.

(b) La fonction g_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'_k(x) &= \frac{e^x(e^x - kx) - (e^x - k)^2}{(e^x - kx)^2} = \frac{e^{2x} - kxe^x - (e^{2x} - 2ke^x + k^2)}{(e^x - kx)^2} \\ &= \frac{2ke^x - kxe^x - k^2}{(e^x - kx)^2} \\ &= k \times \frac{(2-x)e^x - k}{(e^x - kx)^2}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'_k(x) = \frac{kf(x)}{(e^x - kx)^2}}$$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{k}{(e^x - kx)^2} > 0$ donc le signe de g'_k sur $\mathbb{R}$ est celui de la fonction f .

x	$-\infty$	α_k	β_k	$+\infty$
$g'_k(x)$	$-$	0	0	$-$
g_k	0	$g_k(\alpha_k)$	$g_k(\beta_k)$	1

En outre, on a $\boxed{g_k(1) = 1}$.

7. (a) D'après la question 4., on a :

$$\boxed{g_k(\alpha_k) = \frac{e^{\alpha_k} - k}{e^{\alpha_k} - k\alpha_k} = \frac{e^{\alpha_k} - k}{(e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)} = \frac{1}{\alpha_k - 1}}$$

(b) Les points M_k et N_k ont pour coordonnées respectives $\left(\alpha_k, \frac{1}{\alpha_k - 1}\right)$ et $\left(\beta_k, \frac{1}{\beta_k - 1}\right)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in]0, e[, \text{ les points } M_k \text{ et } N_k \text{ sont sur la courbe d'équation } y = \frac{1}{x - 1}}$$

8. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}g_2(x) - g_1(x) &= \frac{e^x - 2}{e^x - 2x} - \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{(e^x - 2)(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 2x)}{(e^x - 2x)(e^x - x)} \\ &= \frac{e^{2x} - xe^x - 2e^x + 2x - (e^{2x} - 2xe^x - e^x + 2x)}{(e^x - 2x)(e^x - x)} \\ &= \frac{xe^x - e^x}{(e^x - 2x)(e^x - x)} \\ &= \frac{(x - 1)e^x}{(e^x - 2x)(e^x - x)}\end{aligned}$$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$ et $e^x - 2x > 0$ et $e^x - x > 0$ (d'après la question 5.(b) avec $k \in \{1, 2\}$). Le signe de $g_2(x) - g_1(x)$ est donc celui de $x - 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g_2(x) - g_1(x)$	$-$	0	$+$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la courbe } \mathcal{C}_1 \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}_2 \text{ sur }]-\infty, 1], \text{ et en-dessous sur } [1, +\infty[}$$

(b) On a (pour $k = 2$) :

$$f(0) = (2 - 0)e^0 - 2 = 2 - 2 = 0$$

Donc 0 est une solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $]-\infty, 1[$. Or cette équation admet une unique solution dans cet intervalle (d'après la question 3.(a)), notée α_2 . On peut donc conclure que :

$$\boxed{\alpha_2 = 0}$$

(c) Graphes de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{H}$

