Devoir Maison 9

un corrigé

Exercice 1 (suite implicite).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et inverse de fonctions qui le sont et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = -\frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} + n$$

puis :

$$\begin{aligned} f_n''(x) = -\frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)^2 - 2\,\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^4} &= -\frac{(1+\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{2x})}{(1+\mathrm{e}^x)^4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3}(\mathrm{e}^x - 1) \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3} > 0$ (comme quotient de nombres strictement positifs) et :

$$\mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff x > 0$$

par stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit les tableaux de signes et de variations suivants (les limites de f_n' et f_n en $+\infty$ et $-\infty$ sont immédiates et $n - \frac{1}{4} > 0$ puisque $n \geqslant 1$ par hypothèse) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n''(x)$		$-$	0	$+$	
f_n'	n	$\searrow$	$n - \frac{1}{4} > 0$	$\nearrow$	n
$f_n'(x)$			$+$		
f_n	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

Concernant les limites de f_n sur $\mathbb{R}$, on a en effet $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\mathrm{e}^x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\mathrm{e}^x) = +\infty$ tandis que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} nx = \pm\infty$, d'où les limites annoncées d'après les propriétés sur les quotients et sommes de limites.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_n'(x) \geqslant n - \dfrac{1}{4} > 0$ donc :

$$\boxed{\text{la fonction } f_n \text{ est } \textit{strictement} \text{ croissante sur } \mathbb{R}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (d'après la question 1.). D'après le théorème de la bijection, la fonction f_n réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle :

$$f_n(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} f_n(x), \lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Comme $0 \in f_n(\mathbb{R})$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet bien une unique solution dans $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe un unique nombre réel } u_n \text{ tel que } f_n(u_n) = 0}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}} - 1$$

Or $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} > 0$ puis $1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} > 1$ et donc, comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}} < 1$ ce qui implique que $f_n\left(-\dfrac{1}{n}\right) < 0$. Par ailleurs :

$$f_n(0) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^0} = \frac{1}{2} > 0$$

On en déduit donc que $f_n\left(-\dfrac{1}{n}\right) < f_n(u_n) < f_n(0)$ (puisque $f_n(u_n) = 0$ par définition de u_n). Or la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $-\dfrac{1}{n}, u_n, 0 \in \mathbb{R}$ donc on peut conclure que :

$$\boxed{-\frac{1}{n} < u_n < 0}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on a :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + (n+1)x - \left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + nx\right) = x \leqslant 0$$

puisque $x \in \mathbb{R}_-$. En évaluant cette inégalité en u_n on a, puisque $u_n \leqslant 0$ (d'après la question 3.) :

$$f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) \leqslant 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad f_{n+1}(u_n) \leqslant 0$$

car $f_n(u_n) = 0$ par définition de u_n. Or on a aussi $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ (par définition de u_{n+1}) donc :

$$\boxed{f_{n+1}(u_n) \leqslant f_{n+1}(u_{n+1})}$$

On sait par ailleurs que la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $u_n, u_{n+1} \in \mathbb{R}$ donc on a l'inégalité $u_n \leqslant u_{n+1}$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. De plus, cette suite est majorée par 0 d'après la question 3. Le théorème de la limite monotone permet alors de conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente}}$$

5. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,on a $-\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 0$. Or :

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est convergente de limite } 0}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $f_n(u_n) = 0$ donc :

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{u_n}} + nu_n = 0 \qquad \text{et donc} \qquad nu_n = -\frac{1}{1+\mathrm{e}^{u_n}} \tag{1}$$

D'après la question 6., la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente de limite 0 donc (par composition des limites et continuité de la fonction exponentielle en 0) :

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{1+\mathrm{e}^{u_n}} = -\frac{1}{2}$$

On déduit de (1) la limite demandée :

$$\boxed{nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}}$$

Exercice 2 (équation fonctionnelle).

1. (a) On utilise un raisonnement par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la proposition :

$$\mathscr{P}_n : « \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k} »$$

⋆ Comme f est solution du problème, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) - f(x) = x$$

donc, en écrivant la relation au point $\frac{x}{2}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f\left(2 \times \frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2},$$

ce que l'on peut réécrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=1}^{1} \frac{x}{2^k}$$

La proposition $\mathscr{P}_1$ est donc vraie.

⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie, *i.e.* que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k}$$

Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, *i.e.* que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x}{2^k}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) &= \left(f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) + \left(f\left(\frac{x}{2^n}\right) - \left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k} + \frac{x}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence pour le premier terme et la relation $(*)$ au point $\frac{x}{2^{n+1}}$ pour le deuxième. En utilisant finalement la relation de Chasles, il vient :

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x}{2^k}$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Par principe de récurrence, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k}}$$

(b) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k} = x \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = x \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \tag{†}$$

On a $\frac{x}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et f est continue en 0 (en effet, f est continue sur $\mathbb{R}$) donc, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, on a $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(0)$. Comme de plus $x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$, on obtient en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (†) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) - f(0) = x \qquad i.e. \qquad f(x) = x + a,$$

en posant $a = f(0) \in \mathbb{R}$. Finalement :

$$\boxed{\text{si } f \text{ est solution du problème, alors il existe } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+a \end{array} \right.}$$

2. On raisonne par analyse-synthèse.
   - ⋆ **Analyse :** si $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+a \end{array} \right.$ (d'après la question précédente).
   - ⋆ **Synthèse :** soient $a \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+a \end{array} \right.$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ (en tant que fonction affine) et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

     $$f(2x) - f(x) = 2x + a - (x + a) = x$$

     donc f vérifie la relation $(*)$. Autrement dit, f est solution du problème.

   Finalement :

$$\boxed{\text{les solutions du problème sont toutes les fonctions de la forme } f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+a \end{array} \right. \text{ où } a \in \mathbb{R}}$$