Devoir Maison 9

un corrigé

Problème 1 (étude d'une suite récurrente).

Partie A : informatique et conjectures

1. (a) On initialise une liste `L` contenant `x0`. À l'étape `k`, le terme x_k de la suite est calculé à l'aide de la relation de récurrence et du dernier terme `L[-1]` de la liste (qui correspond à x_{k-1}).

```
def suite(n,x0) :
    L = [x0]
    for k in range(1,n+1) :
        L.append(L[-1]+1+1/(L[-1]-1))
    return L
```

Remarque : on peut remplacer `L[-1]` par `L[k-1]` dans la boucle.

(b) Le nombre x_n correspond au dernier élément de la liste `suite(n,x0)` (c'est-à-dire à `suite(n,x0)[-1]`). On incrémente la valeur de n tant que $x_n < M$.

```
def depasse(x0,M) :
    n = 0
    while (suite(n,x0) < M) :
        n += 1
    return n
```

2. La fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

On en déduit le tableau de signes de f' ainsi que le tableau de variations de f suivants :

x	1		2		$+\infty$
$\dfrac{x}{(x-1)^2}$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

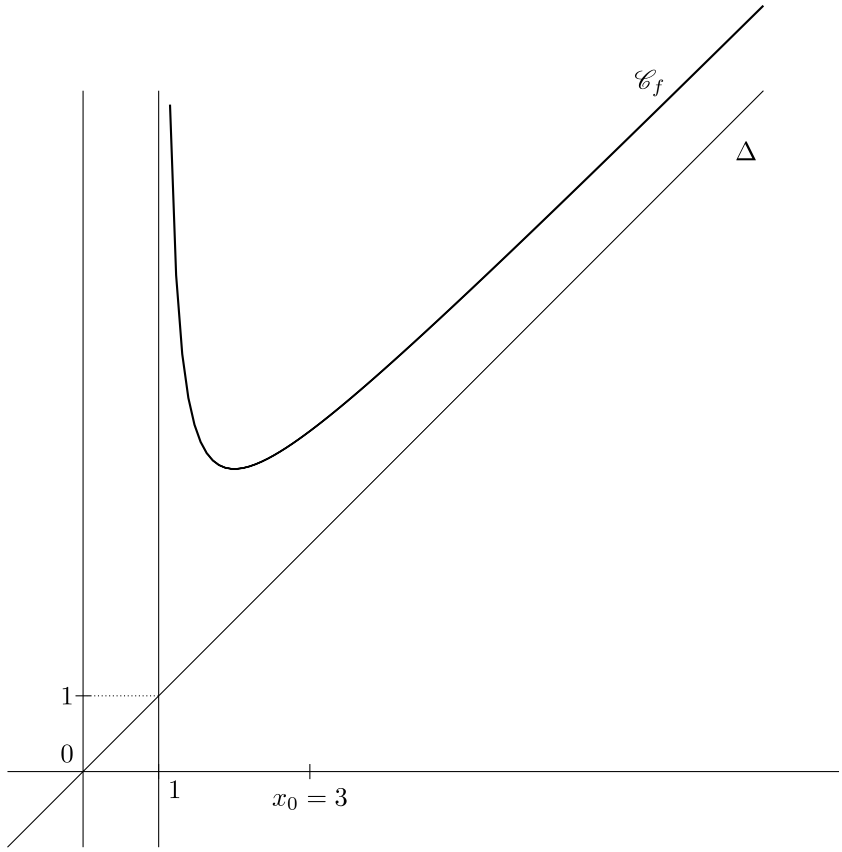
Les limites en 1^+ et en $+\infty$ sont immédiates. Par ailleurs, $f(]1,+\infty[) = [4,+\infty[$ donc :

$$\boxed{f(]1,+\infty[) \subset]1,+\infty[\text{, ce qui signifie que l'intervalle }]1,+\infty[\text{ est stable par } f}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\text{partant de } x_0 \in]1,+\infty[\text{, une récurrence immédiate implique que pour tout } n \in \mathbb{N}\text{, on a } x_n \in]1,+\infty[}$$

3. Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a $\dfrac{1}{x-1} \geqslant 0$ et $1 \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant x$. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f est donc au-dessus de la droite Δ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.



Graphes de la fonction f et de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

La conjecture émise est la suivante :

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ semble croissante et divergente de limite } +\infty.}$$

Partie B : limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $x_{n+1} - x_n = 1 + \dfrac{1}{x_n - 1}$. Or $x_n \in]1, +\infty[$ d'après la question précédente donc $x_n > 1$ puis $\dfrac{1}{x_n - 1} > 0$. Par conséquent, $x_{n+1} - x_n \geqslant 1 > 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est (strictement) croissante.}}$$

5. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, le théorème de la limite monotone nous permet de dire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$, qui est soit finie, soit égale à $+\infty$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$ (limite finie).
   - ⋆ Tout d'abord, remarquons que $\ell > 1$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \geqslant x_0 > 1$ (par croissance de la suite) et donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\ell \geqslant x_0 > 1$.
   - ⋆ On sait ensuite que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$x_{n+1} = x_n + 1 + \frac{1}{x_n - 1}$$

   En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette égalité (ce qui est licite car $\ell \neq 1$), on obtient $\ell = \ell + 1 + \dfrac{1}{\ell - 1}$ d'où l'on déduit l'égalité $\ell = 0$. Ceci est absurde car $\ell > 1$.

   Finalement :

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$$

6. (a) Un utilise un raisonnement par récurrence.

   ⋆ Par hypothèse, on a $x_0 \in]1, +\infty[$ donc $x_0 > 1$ et on a bien $x_0 \geqslant 0+1$. L'inégalité est donc vérifiée au rang 0.

   ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $x_n \geqslant n+1$. Montrons que $x_{n+1} \geqslant n+2$. On sait que $x_{n+1} = x_n + 1 + \dfrac{1}{x_n - 1}$. Par hypothèse de récurrence, on a $x_n \geqslant n+1$ donc $x_{n+1} \geqslant n+2+\dfrac{1}{x_n-1}$. Or on sait que $x_n \in]1, +\infty[$ donc $\dfrac{1}{x_n-1} \geqslant 0$ puis $x_{n+1} \geqslant n+2$. Finalement, l'inégalité est vérifiée au rang $n+1$.

   Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n \geqslant n+1}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $x_{k+1} - x_k - 1 = \dfrac{1}{x_k - 1}$. Comme $x_k > 1$, on a $\dfrac{1}{x_k-1} \geqslant 0$. De plus, on sait d'après la question précédente que $x_k \geqslant k+1$ donc $x_k - 1 \geqslant k > 0$ puis, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient $\dfrac{1}{x_k-1} \leqslant \dfrac{1}{k}$. Finalement :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant x_{k+1} - x_k - 1 \leqslant \frac{1}{k}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $0 \leqslant x_{k+1} - x_k - 1 \leqslant \dfrac{1}{k}$. En sommant ces inégalités, il vient :

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k - 1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Or, par linéarité de la somme,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k - 1) = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=1}^{n-1} 1 = x_n - x_1 - (n-1)$$

puisque la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)$ est télescopique. On en déduit les inégalités annoncées :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant x_n - x_1 - (n-1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}$$

(d) i. La fonction $g : x \longmapsto x - \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $1+x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de x.

x	-1		0		$+\infty$
g	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g présente un minimum en 0 qui vaut $g(0) = 0$. On en déduit que la fonction g est à valeurs positives. On en déduit immédiatement l'inégalité annoncée, à savoir que :

$$\boxed{\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x}$$

ii. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Alors :

$$\ln(k) - \ln(k-1) = -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \geqslant \underbrace{-\left(-\frac{1}{k}\right)}_{=\frac{1}{k}}$$

d'après la question précédente car $-\frac{1}{k} \in]-1, +\infty[$ (puisque $k \geqslant 2$) et en multipliant par $-1 \leqslant 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)}$$

(e) Soit n un entier supérieur ou égal à 3. D'après la question 6.(c), on a :

$$x_n \leqslant x_1 + n - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

et en isolant l'indice $k = 1$ de la somme (relation de Chasles), on a :

$$x_n \leqslant x_1 + n + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Or pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$, on sait que $\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$ d'après la question précédente. Donc (en sommant les inégalités) :

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} (\ln(k) - \ln(k-1))$$

et comme la somme dans le membre de droite est télescopique, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n-1) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}$$

Finalement, $x_n \leqslant x_1 + n + \ln(n-1)$. La minoration de x_n a déjà été établie à la question 6.(a). Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}, \quad n + 1 \leqslant x_n \leqslant x_1 + n + \ln(n-1)}$$

(f) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$. En divisant par n dans les inégalités précédentes, on a :

$$1 + \frac{1}{n} \leqslant \frac{x_n}{n} \leqslant \frac{x_1}{n} + 1 + \frac{\ln(n-1)}{n}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_1}{n} = 0$ et (en factorisant par n dans le logarithme) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n-1)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n} \right) = 0$$

puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissances comparées. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x_1}{n} + 1 + \frac{\ln(n-1)}{n} \right) = 1$$

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure que :

$$\boxed{\frac{x_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

Problème 2 (étude d'une suite implicite).

Partie A : étude des fonctions P_n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Soit $x \in [0, +\infty[$. La fonction P_n est polynomiale, elle est donc dérivable sur $[0, +\infty[$ et :

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{2n-1} (-1)^{\ell+1} x^\ell \qquad \text{(changement d'indice } \ell = k-1\text{)} \\ &= -\sum_{\ell=0}^{2n-1} (-x)^\ell \\ &= -\frac{1 - (-x)^{2n}}{1 - (-x)} \end{aligned}$$

car la somme obtenue est celle des termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$ (en effet, $-x \leqslant 0$). Comme de plus $(-x)^{2n} = (-1)^{2n}x^{2n} = x^{2n}$ (puisque $2n$ est un entier pair), on a bien ;

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, \qquad P_n'(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}}$$

(b) Soit $x \in [0, +\infty[$. Alors $x + 1 > 0$ donc (d'après la question précédente) :

$$P_n'(x) > 0 \iff x^{2n} - 1 > 0 \iff x^{2n} > 1 \iff x > 1$$

par stricte croissance de la fonction $t \longmapsto t^{\frac{1}{2n}}$ sur $[0, +\infty[$. Donc :

la fonction P_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et, de la même façon, elle décroît strictement sur $[0, 1]$; le tableau de variations de P_n sur $[0, +\infty[$ est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
P_n'		$-$	0	$+$	
P_n	0	$\searrow$	$P_n(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

2. (a) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a :

$$\int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x P_n'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[P_n(t)\Big]_0^x = P_n(x) - P_n(0)$$

Or $P_n(0) = 0$ (en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $0^k = 0$) donc :

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, \qquad P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\,\mathrm{d}t}$$

(b) *On propose deux méthodes.*

⋆ **Première méthode :** *à l'aide d'une étude de fonction*

Considérons la fonction $f : t \longmapsto t^{2n} - 1 - nt^2 + n$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$. La fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$ (en tant que fonction polynomiale) et on a :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \qquad f'(t) = 2nt^{2n-1} - 2nt = 2nt(t^{2(n-1)} - 1)$$

Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $2nt \geqslant 0$ (puisque $t \geqslant 0$ et $2n \geqslant 0$) et $t^{2(n-1)} - 1 \geqslant 0$ (car $t \geqslant 1$ et car la fonction $u \longmapsto u^{2(n-1)}$ est croissante sur $[0, +\infty[$ puisque $2(n-1) \geqslant 0$), ce qui implique que $f'(t) \geqslant 0$. La fonction f est donc croissante sur $[1, +\infty[$. En particulier, on a :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \qquad f(t) \geqslant f(1)$$

Ceci démontre l'inégalité proposée puisque $f(1) = 0$.

⋆ **Deuxième méthode :** *en simplifiant l'inégalité*

Si $t = 1$, alors l'inégalité est évidente puisque les deux nombres mis en jeu sont égaux à 0.
Soit maintenant $t \in]1, +\infty[$. Alors $t^2 - 1 > 0$ et l'inégalité à démontrer est équivalente à :

$$\frac{t^{2n} - 1}{t^2 - 1} \geqslant n \qquad \text{soit encore à} \qquad \frac{(t^2)^n - 1}{t^2 - 1} \geqslant n$$

Le quotient $\dfrac{(t^2)^n - 1}{t^2 - 1}$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $t^2 \neq 1$; plus exactement :

$$\frac{(t^2)^n - 1}{t^2 - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} (t^2)^k = \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k}$$

Comme $t \geqslant 1$, on a $t^{2k} \geqslant 1$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ par croissance de la fonction $u \longmapsto u^{2k}$ sur $[0, +\infty[$. En sommant les inégalités, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} 1 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} \geqslant n$$

L'inégalité annoncée est démontrée.

Finalement :

$$\boxed{\forall t \in [1, +\infty[, \qquad t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1)}$$

(c) Soit $x \in [1, +\infty[$. D'après la question 2.(a) et la relation de Chasles (pour les intégrales), on a :

$$P_n(x) - P_n(1) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\,\mathrm{d}t$$

On minore maintenant la dernière intégrale en exploitant l'inégalité de la question 2.(b). Soit $t \in [1, x]$. On sait que $t^{2n} - 1 \geqslant n(t-1)(t+1)$ et donc, en divisant par $t + 1 > 0$,

$$\forall t \in [1, x], \qquad \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \geqslant n(t - 1)$$

Par croissance de l'intégrale, on a (puisque les bornes d'intégration sont dans le bon sens par hypothèse sur x, à savoir que $1 \leqslant x$) :

$$\int_1^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_1^x n(t - 1)\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec} \qquad \int_1^x n(t - 1)\,\mathrm{d}t = \left[n\frac{(t - 1)^2}{2}\right]_1^x = \frac{n}{2}(x - 1)^2$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[, \qquad P_n(x) - P_n(1) \geqslant \frac{n}{2}(x - 1)^2}$$

(d) Comme $\frac{n}{2} > 0$ (puisque $n \in \mathbb{N}^*$), on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{n}{2}(x - 1)^2 = +\infty$. Comme $P_n(1)$ est une constante, on a aussi :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(P_n(1) + \frac{n}{2}(x - 1)^2\right) = +\infty$$

Le théorème de comparaison et l'inégalité obtenue permettent de conclure que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} P_n(x) = +\infty}$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $0^k = 0$ donc :

$$\boxed{P_n(0) = 0}$$

On sait d'après la question 1.(b) que la fonction P_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$. Comme $0 < 1$, on a $P_n(0) > P_n(1)$, c'est-à-dire :

$$\boxed{P_n(1) < 0}$$

4. La fonction P_n est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$ (en tant que fonction polynomiale) et elle y est strictement croissante (d'après la question 1.(b)). D'après le théorème de la bijection, la fonction P_n réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur l'intervalle :

$$P_n([1, +\infty[) = \left[P_n(1), \lim_{x \to +\infty} P_n(x)\right[= [P_n(1), +\infty[$$

Comme $P_n(1) < 0$, on a $0 \in P_n([1, +\infty[)$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{l'équation } P_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution } x_n \text{ dans l'intervalle } [1, +\infty[}$$

Partie B : étude de la suite implicite $(x_n)_{n \geqslant 1}$

5. Soit $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times [0, +\infty[$. On a, d'après la relation de Chasles (pour les sommes),

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x) - P_n(x) &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k x^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} \\
&= \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{2n + 1} + \frac{(-1)^{2n+2} x^{2n+2}}{2n + 2} \\
&= -\frac{x^{2n+1}}{2n + 1} + \frac{x^{2n+2}}{2n + 2} \qquad \text{(car } 2n + 1 \text{ est impair et } 2n + 2 \text{ est pair)}
\end{aligned}$$

et donc, en factorisant par x^{2n+1}, on a bien :

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, \qquad P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n + 1} + \frac{x}{2n + 2}\right)}$$

6. (a) Soit $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \left[\dfrac{2n+2}{2n+1}, +\infty\right[$. D'après la question précédente, on a :

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = (2n+2)x^{2n+1}\left(x - \frac{2n+2}{2n+1}\right)$$

Or $x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1} \geqslant 0$ donc $x^{2n+1} \geqslant 0$ et $x - \dfrac{2n+2}{2n+1} \geqslant 0$. De plus, on a $2n+2 \geqslant 0$ donc, par produit, $P_{n+1}(x) - P_n(x) \geqslant 0$, soit encore $P_{n+1}(x) \geqslant P_n(x)$. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left[\frac{2n+2}{2n+1}, +\infty\right[, \qquad P_{n+1}(x) \geqslant P_n(x)}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{N}^*$. En exploitant l'inégalité obtenue à la question précédente au point $x = x_n$ (ce qui est licite puisqu'il est admis dans l'énoncé que $x_n \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$), on a :

$$P_{n+1}(x_n) \geqslant P_n(x_n)$$

Or, par définition de x_n, on a $P_n(x_n) = 0$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P_{n+1}(x_n) \geqslant 0}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de x_{n+1}, on sait que $P_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. L'inégalité obtenue à la question précédente se réécrit donc $P_{n+1}(x_n) \geqslant P_{n+1}(x_{n+1})$. Or on sait que la fonction P_{n+1} est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ (question 1.(b)) et on sait aussi que $(x_n, x_{n+1}) \in [1, +\infty[^2$ (question 4.). Par conséquent, $x_n \geqslant x_{n+1}$. Ainsi :

$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante ; de plus, celle-ci est minorée par 1 donc elle converge (d'après le théorème de la limite monotone)}}$

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 2.(a), on a :

$$P_n(1) = \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a $0 \leqslant t^{2n} \leqslant 1$ donc $-1 \leqslant t^{2n} - 1 \leqslant 0$ puis (en divisant par $t+1 > 0$) :

$$\forall t \in [0,1], \qquad -\frac{1}{t+1} \leqslant \frac{t^{2n}-1}{t+1} \leqslant 0$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes d'intégration sont dans le bon sens : $0 \leqslant 1$), il vient :

$$-\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t \leqslant P_n(1) \leqslant 0 \qquad \text{avec} \qquad \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t+1)\Big]_0^1 = \ln(2)$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad -\ln(2) \leqslant P_n(1) \leqslant 0}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $x_n \in [1, +\infty[$, on a d'après l'inégalité établie à la question 2.(c) :

$$P_n(x_n) - P_n(1) \geqslant \frac{n}{2}(x_n - 1)^2 \qquad \text{c'est-à-dire (par définition de } x_n) \qquad \frac{n}{2}(x_n-1)^2 \leqslant -P_n(1)$$

Or $-P_n(1) \in [0, \ln(2)]$ d'après la question précédente et $\dfrac{n}{2}(x_n - 1)^2 \geqslant 0$ comme produit de nombres positifs donc :

$$0 \leqslant \frac{n}{2}(x_n-1)^2 \leqslant \ln(2) \qquad \text{puis (en multipliant par } \tfrac{2}{n} \geqslant 0) \qquad 0 \leqslant (x_n-1)^2 \leqslant \frac{2\ln(2)}{n}$$

Comme la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, on obtient :

$$0 \leqslant |x_n - 1| \leqslant \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}$$

On sait que $x_n \in [1, +\infty[$ donc $x_n - 1 \geqslant 0$ ce qui implique que $|x_n - 1| = x_n - 1$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}}}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite $(x_n - 1)_{n\geqslant 1}$ converge de limite 0. On peut donc conclure que :

$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente de limite 1}}$