

# DEVOIR MAISON 9

*un corrigé*

## Exercice 1.

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  (propriété des fonctions puissances à exposant réel) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = (1 - \alpha)x^{-\alpha} \geq 0 \quad (\text{car } \alpha \leq 1 \text{ et } x^{-\alpha} \geq 0)$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$$

2. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On sait que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc, en particulier,  $f$  est continue sur  $[k, k+1]$  et dérivable sur  $]k, k+1[$ . D'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c \in ]k, k+1[$  tel que :

$$\frac{f(k+1) - f(k)}{(k+1) - k} = f'(c) \quad \text{i.e. tel que} \quad (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} = (1 - \alpha)c^{-\alpha} = \frac{1 - \alpha}{c^\alpha}$$

En divisant par  $1 - \alpha \neq 0$  (car  $\alpha \in ]0, 1[$ ), on peut conclure que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists c \in ]k, k+1[, \quad \frac{1}{c^\alpha} = \frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1 - \alpha}}$$

3. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On sait qu'il existe  $c \in ]k, k+1[$  tel que :

$$\frac{1}{c^\alpha} = \frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1 - \alpha}$$

Or  $c \geq k > 0$  et la fonction  $t \mapsto t^{-\alpha}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  (car  $-\alpha \leq 0$ ) donc :

$$c^{-\alpha} \leq k^{-\alpha} \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{c^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1 - \alpha}}$$

4. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question précédente, on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1 - \alpha}$$

Sommons ces inégalités :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^n \left( \frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \right)$$

où (la somme de droite est télescopique) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left( \frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \right) &= \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{k=1}^n ((k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}) = \frac{1}{1 - \alpha} ((n+1)^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}) \\ &= \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha}}$$

5. On sait que  $\alpha \in ]0, 1[$  donc  $1 - \alpha > 0$ . On en déduit que  $\frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Le théorème de comparaison et les inégalités obtenues à la question précédente permettent de conclure que :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$$

## Exercice 2.

Soit  $\varepsilon > 0$ .

1. Par définition de la limite, il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, |x - 0| \leq \alpha \implies \left| \frac{f(2x) - f(x)}{x} - 0 \right| \leq \varepsilon$$

Soit  $y \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$ . Alors  $\frac{y}{2} \in [-\alpha, \alpha]$  donc, d'après l'inégalité précédente appliquée au point  $\frac{y}{2}$ , on a :

$$\left| \frac{f(y) - f\left(\frac{y}{2}\right)}{\frac{y}{2}} \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui fournit l'inégalité souhaitée en multipliant par  $\left|\frac{y}{2}\right| \geq 0$ . On remarque enfin que l'inégalité à démontrer est évidente pour  $y = 0$  (les deux nombres mis en jeu dans l'inégalité étant égaux à 0). Ainsi :

il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $y \in [-\alpha, \alpha]$ , on ait  $\left| f(y) - f\left(\frac{y}{2}\right) \right| \leq \varepsilon \left| \frac{y}{2} \right|$

2. Soient  $x \in [-\alpha, \alpha]$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) La somme proposée est télescopique ; elle est égale à :

$$\sum_{k=0}^n \left( f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right) = f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

- (b) Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On a  $\frac{x}{2^k} \in [-\alpha, \alpha]$  (puisque  $\frac{1}{2^k} \leq 1$ ) donc, d'après la question 1., on a :

$$\left| f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right| \leq \varepsilon \left| \frac{x}{2^{k+1}} \right|$$

En utilisant la question 2.(a) et l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left| f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \right| \leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right| \leq \sum_{k=0}^n \varepsilon \left| \frac{x}{2^{k+1}} \right|$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \varepsilon \left| \frac{x}{2^{k+1}} \right| &= \varepsilon |x| \sum_{k=1}^{n+1} \left( \frac{1}{2} \right)^k = \varepsilon |x| \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \varepsilon |x| \underbrace{\left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)}_{\leq 1} \\ &\leq \varepsilon |x| \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \right| \leq \varepsilon |x| \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} \leq \varepsilon |x|$$

3. La fonction  $f$  est continue en 0 et  $\frac{x}{2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité,

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$$

Ainsi, en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans l'inégalité obtenue à la question précédente, on obtient :

$$|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon |x|$$

Résumons. On a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [-\alpha, \alpha], \quad |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon |x|$$

ce que l'on peut réécrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\} \implies \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \leq \varepsilon$$

On peut donc conclure que :

la fonction  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$