

DEVOIR MAISON 9

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1.

Soit $\alpha \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

On veut déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.

1. On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{1-\alpha} \end{cases}$. Étudier les variations de f sur son domaine de définition.
2. Justifier que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists c \in]k, k+1[, \quad \frac{1}{c^\alpha} = \frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

3. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

4. Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq \frac{(N+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$$

5. Conclure quant à la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (facultatif).

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ une fonction que l'on suppose continue en 0 et telle que :

$$\frac{f(2x) - f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

On veut montrer que f est alors dérivable en 0. On se donne un nombre réel strictement positif ε .

1. Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall y \in [-\alpha, \alpha], \quad \left| f(y) - f\left(\frac{y}{2}\right) \right| \leq \varepsilon \left| \frac{y}{2} \right|$$

2. Soient $x \in [-\alpha, \alpha]$ et $n \in \mathbb{N}$.

(a) Calculer la somme $\sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right)$.

- (b) Montrer successivement les deux inégalités suivantes :

$$\left| f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \right| \leq \varepsilon |x| \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} \leq \varepsilon |x|$$

3. Conclure que la fonction f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.