Devoir Maison 9

Problème 1 (étude d'une suite récurrente).

Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in]1, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + 1 + \dfrac{1}{x_n - 1} \end{cases}$$

On note f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \qquad f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

Partie A : informatique et conjectures

1. *Question informatique*
   (a) Écrire une fonction Python nommée `suite(n,x0)` qui prend en entrée un entier naturel n et un nombre `x0` représentant le premier terme de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et qui renvoie la liste `[x0,x1,...,xn]` des $n+1$ premiers termes de la suite.
   (b) Écrire une fonction `depasse(x0,M)` qui prend en entrée le premier terme `x0` de la suite, un nombre réel `M` strictement positif, et qui renvoie la première valeur de n pour laquelle $x_n \geqslant$ `M`.
2. Étudier la fonction f sur $]1, +\infty[$ et justifier que l'intervalle $]1, +\infty[$ est stable par f. Que peut-on en déduire ?
3. Sur un même graphique, représenter la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f, la droite Δ d'équation $y = x$ et les premiers termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (*on choisira la valeur initiale* $x_0 = 3$). Quelle(s) conjecture(s) peut-on émettre sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   Pour la représentation graphique, on commencera par étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ *et* Δ *sur* $]1, +\infty[$.

Partie B : limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Justifier que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$ et la déterminer.
6. *Nous cherchons dans cette question à préciser le comportement asymptotique de la suite.*
   (a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, on a l'inégalité $x_n \geqslant n+1$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$0 \leqslant x_{k+1} - x_k - 1 \leqslant \frac{1}{k}$$
   (c) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad 0 \leqslant x_n - x_1 - (n-1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$
   (d) i. Établir que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.

ii. En déduire que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a :

$$\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$$

(e) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$n + 1 \leqslant x_n \leqslant x_1 + n + \ln(n-1)$$

On utilisera la question 6.(c).

(f) Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ quand n tend vers $+\infty$.

Problème 2 (étude d'une suite implicite).

Dans ce problème, on pourra utiliser le résultat d'intégration suivant, vu en classe de Terminale (et qui sera démontré ultérieurement en MPSI).

Théorème (croissance de l'intégrale) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et $f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que :

$$\forall x \in [a, b], \qquad f(x) \leqslant g(x)$$

Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynôme $P_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

Partie A : étude des fonctions P_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a les égalités suivantes :

$$P_n'(x) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1},$$

où P_n' désigne la dérivée de P_n.

(b) En déduire le sens de variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n. *La limite de P_n en $+\infty$ sera déterminée à la question* 2.(c).

2. (a) Justifier que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\,\mathrm{d}t$$

(b) Démontrer que :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \qquad t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1)$$

Indication : on pourra faire une étude de fonction.

(c) En déduire que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad P_n(x) - P_n(1) \geqslant \frac{n}{2}(x-1)^2$$

Remarque : d'après la relation de Chasles pour les intégrales et la question 2.(a), on a :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad P_n(x) - P_n(1) = \int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

(d) Donner la limite de P_n quand x tend vers $+\infty$.

3. Calculer $P_n(0)$ et justifier que $P_n(1) < 0$.
4. Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1, +\infty[$ (que l'on notera dans la suite x_n).

Ainsi, pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, on a $P_m(x_m) = 0$.

Partie B : étude de la suite implicite $(x_n)_{n\geqslant 1}$

Dans cette partie, on admettra le fait suivant (que l'on pourra donc utiliser sans démonstration) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_n \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}$$

5. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, +\infty[, \qquad P_{n+1}(x) - P_n(x) = x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right)$$

6. (a) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left[\frac{2n+2}{2n+1}, +\infty\right[, \qquad P_{n+1}(x) \geqslant P_n(x)$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P_{n+1}(x_n) \geqslant 0$$

(c) Montrer alors que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Conclure qu'elle converge.

7. (a) En utilisant la question 2.(a) et la propriété de croissance de l'intégrale, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad -\ln(2) \leqslant P_n(1) \leqslant 0$$

(b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question 2.(c), montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}}$$

Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$?

TVI : LE RETOUR [1]

Pour démontrer le théorème des valeurs intermédiaires, nous avons utilisé le principe de dichotomie qui consiste à isoler de proche en proche une solution c de l'équation $f(x) = 0$ en construisant par récurrence deux suites adjacentes qui convergent géométriquement vers c.
Dans cette démonstration, on utilise donc essentiellement le théorème sur les suites adjacentes (deux suites adjacentes sont convergentes de limite commune), lequel se démontre à l'aide du théorème de la limite monotone (toute suite croissante et majorée est convergente). Enfin l'argument essentiel de ce dernier résultat est la propriété de la borne supérieure.
Bref, il doit donc être possible d'utiliser un raisonnement « direct » reposant uniquement sur la propriété de la borne supérieure pour démontrer le théorème des valeurs intermédiaires. L'objet de cette note est de présenter une démonstration alternative en utilisant directement ladite propriété.

Théorème (des valeurs intermédiaires) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$. Alors :

$$\exists\, c \in [a,b], \qquad f(c) = 0$$

Démonstration Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f(a) \leqslant 0$ (et alors $f(b) \geqslant 0$). En effet, f est continue sur $[a,b]$ si et seulement si la fonction f l'est, et f s'annule sur $[a,b]$ en un point c si et seulement si $-f$ s'annule en ce point.

Considérons l'ensemble :

$$\mathscr{E} = \left\{ x \in [a,b] \,\middle|\, f(x) \leqslant 0 \right\}$$

Cet ensemble est une partie de $\mathbb{R}$ qui est non vide (elle contient a) et qui est majorée (par b par définition de $\mathscr{E}$) ; elle admet donc une borne supérieure que l'on note c. Montrons que $f(c) = 0$. Par antisymétrie de la relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que $f(c) \leqslant 0$ et $f(c) \geqslant 0$.

- ⋆ Comme $c = \sup(\mathscr{E})$, il existe $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers c (caractérisation séquentielle de la borne supérieure). Par définition de $\mathscr{E}$, on a :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(x_n) \leqslant 0 \qquad (\text{puisque } x_n \in \mathscr{E}),$$

  puis, en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité au point c (la fonction f est continue sur $[a,b]$ donc en particulier au point c) et le passage à la limite dans les inégalités, on obtient $f(c) \leqslant 0$.
- ⋆ Si $c = b$, alors on a aussi $f(c) \geqslant 0$ (d'après notre hypothèse) et donc $f(c) = 0$.
- ⋆ Supposons maintenant que $c < b$. Alors $c + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$ donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

  $$\forall n \geqslant N, \qquad c + \frac{1}{n} \in [a,b]$$

  Par ailleurs, on sait aussi que pour tout $n \geqslant N$, on a $c + \dfrac{1}{n} \notin \mathscr{E}$ (car sinon $c + \dfrac{1}{n} \leqslant c$ par définition de la borne supérieure d'un ensemble, ce qui est exclu) donc :

  $$\forall n \geqslant N, \qquad f\left(c + \frac{1}{n}\right) > 0$$

  La caractérisation séquentielle de la continuité nous donne alors, en passant à la limite, l'inégalité $f(c) \geqslant 0$.
  Finalement, $f(c) = 0$.

Dans tous les cas, on a l'égalité $f(c) = 0$, ce qui achève la démonstration. ■

1. Un peu de lecture en attendant Papa Noël