Devoir Maison 8

un corrigé

Exercice 1 (suite implicite).

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f_n'(x) = \frac{1}{x} + n > 0 \qquad \text{car } \frac{1}{x} > 0 \text{ et } n \geqslant 0$$

On en déduit que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On obtient le tableau de variation de f_n suivant (les limites sont immédiates) :

x	0		$+\infty$
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

On applique maintenant le théorème de la bijection. La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f_n(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ donc $0 \in f_n(\mathbb{R}_+^*)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution } u_n \text{ dans } \mathbb{R}_+^*}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f_{n+1}(x) - f_n(x) = \ln(x) + (n+1)x - \big(\ln(x) + nx\big) = x > 0$$

donc :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } f_{n+1} - f_n \text{ est à valeurs strictement positives sur } \mathbb{R}_+^*}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a $(f_{n+1} - f_n)(u_n) > 0$ (d'après la question précédente), *i.e.* $f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n)$. Or on sait que $f_n(u_n) = 0$ par définition de u_n donc $f_{n+1}(u_n) > 0$, ce que l'on peut réécrire $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$ (par définition de u_{n+1}). Or la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u_n, u_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ donc $u_n > u_{n+1}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } u \text{ est (strictement) décroissante}}$$

(d) La suite u est décroissante et minorée par 0 (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \mathbb{R}_+^*$) donc u est convergente d'après le théorème de la limite monotone. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de la suite u.

- ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$ donc $\ell \geqslant 0$.
- ⋆ Montrons que $\ell = 0$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que $\ell > 0$. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_n(u_n) = 0 \qquad \textit{i.e.} \qquad \ln(u_n) = -nu_n \tag{$*$}$$

Comme $\ell > 0$, on a $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell) \in \mathbb{R}$ tandis que $-nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ (opération sur les limites). Ceci fournit une absurdité en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans $(*)$. Ainsi, $\ell = 0$.

Finalement :

$$\boxed{\text{la suite } u \text{ est convergente de limite } 0}$$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(u_n) = 0$, *i.e.* $nu_n = -\ln(u_n)$. Or $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $x_n = -\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par conséquent :

$$\boxed{x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\ln(u_n) + nu_n = 0$, *i.e.* $\ln(u_n) + x_n = 0$. Or $x_n = nu_n$ donc $u_n = \dfrac{x_n}{n}$, ce qui implique que :

$$\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) + x_n = 0 \qquad i.e. \qquad \ln(x_n) - \ln(n) + x_n = 0$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_n + \ln(x_n) = \ln(n)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En divisant par $x_n > 0$ dans l'égalité précédente, on a :

$$1 + \frac{\ln(x_n)}{x_n} = \frac{\ln(n)}{x_n}$$

Or $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc, par croissances comparées, on a $\dfrac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la dernière égalité, on a $\dfrac{\ln(n)}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. En passant à l'inverse, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\frac{x_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

Exercice 2 (nombres de Fermat).

1. On a $u_3 = 2^3 + 1 = 9 = 3 \times 3$ donc u_3 n'est pas un nombre premier. Ainsi :

$$\boxed{\text{l'assertion proposée est fausse}}$$

2. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= a\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} - b\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} a^\ell b^{n-\ell} - \sum_{\ell=0}^{n-1} a^\ell b^{n-\ell} \quad \text{(changement d'indice } \ell = k+1 \text{ dans la première somme)} \\
&= a^n b^0 - a^0 b^n \qquad \text{(sommes télescopiques)} \\
&= a^n - b^n
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On raisonne par contraposition. Supposons que n ne soit pas une puissance de 2. Alors il existe un entier impair $m \geqslant 3$ tel que $n = m2^k$ où $k = v_2(n)$. En utilisant la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
u_n = 2^{m2^k} + 1 &= \left(2^{2^k}\right)^m - (-1)^m \qquad \text{(car } m \text{ est impair)} \\
&= \left(2^{2^k} - (-1)\right)\sum_{i=0}^{m-1} 2^{i2^k}(-1)^{m-1-i} \\
&= \left(2^{2^k} + 1\right)\underbrace{\sum_{i=0}^{m-1} 2^{i2^k}(-1)^{m-1-i}}_{\in\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

On a $1 < 2^{2^k} + 1 < 2^{m2^k} + 1 = u_n$ et $2^{2^k} + 1 \mid u_n$ d'après l'égalité précédente donc u_n n'est pas un nombre premier. En prenant la forme contraposée, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{si } u_n \text{ est un nombre premier, alors } n \text{ est une puissance de } 2}$$

3. (a) On procède par récurrence.

★ On a $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$ et :

$$F_1 = 2^2 + 1 = 5 = 2 + F_0 = 2 + \prod_{k=0}^{0} F_k$$

L'égalité est donc vraie au rang $n = 0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $F_{n+1} = 2 + \prod_{k=0}^{n} F_k$. Montrons que $F_{n+2} = 2 + \prod_{k=0}^{n+1} F_k$. On a :

$$\prod_{k=0}^{n+1} F_k = \left(\prod_{k=0}^{n} F_k\right) F_{n+1} = (F_{n+1} - 2)F_{n+1} \qquad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} 2 + \prod_{k=0}^{n+1} F_k = 2 + F_{n+1}^2 - 2F_{n+1} &= 2 + \left(2^{2^{n+1}} + 1\right)^2 - 2\left(2^{2^{n+1}} + 1\right) \\ &= 2 + 2^{2\times 2^{n+1}} + 2 \times 2^{2^{n+1}} + 1 - 2 \times 2^{2^{n+1}} - 2 \\ &= 2^{2^{n+2}} + 1, \end{aligned}$$

d'où l'égalité au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+1} = 2 + \prod_{k=0}^{n} F_k}$$

(b) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \neq n$. Posons $d = F_m \wedge F_n$. Il s'agit de montrer que $d = 1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $m > n$. On a $d \mid n$ et $n \leqslant m - 1$ donc $d \mid \prod_{k=0}^{m-1} F_k$. Par ailleurs, $d \mid F_m$ donc :

$$d \mid F_m - \prod_{k=0}^{m-1} F_k \qquad i.e. \qquad d \mid 2$$

d'après la question précédente. Par définition du PGCD, on a $d > 0$ donc $d = 1$ ou $d = 2$. Remarquons de plus que $F_n = 2^{2^n} + 1$ est impair (puisque 2^{2^n} est pair) donc $d \neq 2$. Ainsi, $d = 1$. Finalement :

$$\boxed{\forall m, n \in \mathbb{N}, \qquad m \neq n \implies F_m \wedge F_n = 1}$$