Devoir Maison 8

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1 (suite implicite).

1. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction $f_n : x \longmapsto \ln(x) + nx$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier la fonction f_n et montrer que l'équation $\ln(x) + nx = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. *On notera cette solution u_n dans la suite.*
   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de la fonction $f_{n+1} - f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) En déduire le sens de variation de $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Déterminer la limite de la suite u quand n tend vers $+\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = nu_n$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n + \ln(x_n) = \ln(n)$ puis que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\ln(n)} = 1$$

Exercice 2 (nombres de Fermat).

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = 2^n + 1$.

1. L'assertion « pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre u_n est premier » est-elle vraie ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$
   (b) En déduire que, si u_n est un nombre premier, alors n est une puissance de 2.
   Indication : si n n'est pas une puissance de 2, alors, en posant[1] $k = v_2(n) \in \mathbb{N}$, il existe un entier impair m supérieur ou égal à 3 tel que $n = m2^k$.

Pour tout entier naturel n, on pose alors $F_n = 2^{2^n} + 1$ (ce nombre est appelé le n^{e} *nombre de Fermat*).

3. (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+1} = 2 + \prod_{k=0}^{n} F_k$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall m, n \in \mathbb{N}, \qquad m \neq n \implies F_m \wedge F_n = 1$$

1. L'entier k est donc la plus grande puissance de 2 divisant k.