Devoir Maison 8

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Exercice 1 (suite implicite, mardi 10 décembre).

Soit n un entier naturel non nul. On définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + nx$$

1. Étudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe un unique nombre réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que $\dfrac{-1}{n} < u_n < 0$.
4. Étudier le signe de $f_{n+1} - f_n$ sur $\mathbb{R}_-$ puis comparer $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
5. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
6. Déterminer la limite de la suite $(nu_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 2 (nombres de Fermat, mardi 17 décembre).

1. Soient a un entier strictement supérieur à 1 et n un entier naturel non nul. On suppose que a^n+1 est un nombre premier.
   (a) Montrer que a est pair.
   (b) Soit m un diviseur impair de n. Il existe alors $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = km$. Montrer que $a^k + 1$ divise $a^n + 1$ puis que $m = 1$.
   (c) Que peut-on en déduire sur l'entier n ?
2. Pour tout entier naturel n, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ (*le nombre F_n est appelé le n^e nombre de Fermat*).
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$$
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k$$
   (c) Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tel que $m < n$. Montrer que $F_m \wedge F_n = 1$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et p un nombre premier divisant F_n. On considère l'ensemble :
   $$A = \left\{k \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; 2^k \equiv 1\,[p]\right\}$$
   (a) Montrer que $2^{n+1} \in A$.
   (b) Justifier que A admet un minimum. *On le notera m.*
   (c) En écrivant la division euclidienne de 2^{n+1} par m, montrer que m divise 2^{n+1}.
   (d) Montrer que $m = 2^{n+1}$.
   (e) Justifier que $p - 1 \in A$.
   (f) En déduire que $p \equiv 1\,[2^{n+1}]$.